Připomeňme si definici logaritmu a tři základní vztahy, bez kterých to nepůjde:

Logaritmus čísla $x \in \mathbb{R}^+$ o základu $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ je exponent y, kterým musíme umocnit základ a, abychom dostali číslo x:

$$\log_a x = y \iff a^y = x$$

Pro každé $a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ a pro $r, s \in \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{R}$ platí:

$$\log_a r + \log_a s = \log_a(r \cdot s) \qquad \log_a r - \log_a s = \log_a \frac{r}{s} \qquad k \cdot \log_a r = \log_a(r^k)$$

Úloha 1. Řešte v $\mathbb{R}$ základní logaritmické rovnice:

a) $\log_6(4x + 8) = 2$

b) $\log_3(x^2 - 8x) = 2$

c) $\log_3(1 - x) = \log_3(x + 16 - x^2)$

d) $\log_2(x^2 - 3x + 1) = \log_2(2x - 3)$

e) $\log_3(x + 6) + \log_3(x - 2) = 2$

f) $\log(3x - 1) - \log(3x + 1) = \log 3$

g) $\log(3x^2 + 1) - \log(3 + x) = \log(3x - 2)$

h) $\dfrac{\log x}{\log(5x - 3)} = 1$

Úloha 2. Řešte v $\mathbb{R}$ zajímavější logaritmické rovnice:

a) $3 \cdot \log 2 - \log(x - 1) = \log(x + 1) - \log(x - 2)$

b) $\log(x + 2) + \log(x - 7) = 2 \cdot \log(x - 4)$

c) $\dfrac{\log_5(x^2 + 7)}{\log_5(x + 7)} = 2$

d) $\log(x + 13) - \log(x - 3) = 1 - \log 2$

e) $\log(x + 2) + \log 4 = 2 + \log(x - 1)$

f) $-2 \cdot \log_{\frac{1}{2}}(4 - x) = 3 - \log_{\frac{1}{2}}(10 - x)$

Úloha 3. A pro nadšence méně tradičních úloh ještě jedna sada:

a) $\log_4 \sqrt{3+x} + \log_4 \sqrt{x+4} = \frac{1}{4} + \log_4 \sqrt{7x+1}$

b) $\log_{\sqrt{2}}(2x-3) + \log_{\sqrt{2}}(x+1) - \log_{\sqrt{2}}(4x-5) = 0$

c) $\log_2^2 x - \log_2 x - 2 = 0$

d) $\log x + \frac{1}{\log x} = 2$

e) $\log x - 2 = \frac{6}{\log x} - 1$

Výsledky

1.

a) 7

b) -1; 9

c) -3

d) 4

e) 3

f) $\emptyset$

g) 1

h) $\frac{3}{4}$

2.

a) 3; 5

b) 10

c) -3

d) 7

e) $\frac{9}{8}$

f) -8

3.

a) 2; 5

b) 2

c) 4; $\frac{1}{2}$

d) 10

e) 1000; 0.01