

1 Induktivní statistika

Úloha 1. Náhodný výběr je popsán následující variační řadou

x_i	4	5	6	7	9
f_i	1	4	5	8	2

Určete

a) bodové odhady

b) intervalové odhady se stupněm spolehlivosti 99 %

střední hodnoty a rozptylu základního souboru, z něhož byl náhodný výběr proveden.

$$\bar{x} = \frac{128}{20} = \hat{\mu} = 6.4$$

$$s^2 = 1.54 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = 1.621$$

$$\alpha = 0.01$$

$$6.4 - \frac{\sqrt{1.54}}{\sqrt{19}} \cdot 2.8609 < \mu < 6.4 + \frac{\sqrt{1.54}}{\sqrt{19}} \cdot 2.8609$$

$$5.586 < \mu < 7.214$$

$$\frac{20 \cdot 1.54}{38.5823} < \sigma^2 < \frac{20 \cdot 1.54}{6.844}$$

$$0.798 < \sigma^2 < 4.5$$

Úloha 2. Příjímací zkoušky skládalo 5000 uchazečů o studium. Pro předběžnou rychlou orientaci je třeba rychle znát průměr známek z písemné práce. Proto bylo náhodně vybráno 50 prací a byly zjištěny výsledky uvedené v tabulce. Stanovte 95% interval spolehlivosti pro hledaný průměr známek.

známka	1	2	3	4
počet prací	7	12	23	8

$$\bar{x} = \frac{132}{50} = \hat{\mu} = 2.64$$

$$s^2 = 0.8304 \Rightarrow \hat{\sigma}^2 = 0.8473$$

$$\alpha = 0.05 \quad z_{0.025} = \Phi^{-1}(1 - 0.025) = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$$

$$2.64 - \frac{\sqrt{0.8304}}{\sqrt{49}} \cdot 1.96 < \mu < 2.64 + \frac{\sqrt{0.8304}}{\sqrt{49}} \cdot 1.96$$

$$2.385 < \mu < 2.895$$

levostranný (u jednostranných odhadů se bere v úvahu pouze jedna strana intervalu ve které se se zdvojnásobí hladina významnosti)

$$z_{0.05} = \Phi^{-1}(1 - 0.05) = \Phi^{-1}(0.95) = 1.645$$

$$2.64 - \frac{\sqrt{0.8304}}{\sqrt{49}} \cdot 1.645 < \mu < +\infty$$

$$2.426 < \mu < +\infty$$

pravostranný

$$-\infty < \mu < 2.64 + \frac{\sqrt{0.8304}}{\sqrt{49}} \cdot 1.645$$

$$-\infty < \mu < 2.854$$

jednostranné pro rozptyl:

$$\frac{50 \cdot 0.8304}{67.5048} < \sigma^2 < \infty$$

$$0.615 < \sigma^2 < \infty$$

$$0 \leq \sigma^2 < \frac{50 \cdot 0.8304}{34.7643}$$

$$0 \leq \sigma^2 < 1.194$$

Úloha 3. Z časového snímku montážní operace vyplývá, že bylo provedeno 18 pozorování. Zjištěný průměr doby trvání operace je 37 sekund a směrodatná odchylka 3 sekundy. Sestrojte 90% interval spolehlivosti pro očekávanou délku montáže za předpokladu, že tato veličina má normální rozdělení.

$$\bar{x} = \hat{\mu} = 37 \quad \sigma = 3 \quad \alpha = 0.1 \quad z_{0.005} = 2.575$$

$$37 - \frac{3}{\sqrt{18}} \cdot 2.575 < \mu < 37 + \frac{3}{\sqrt{18}} \cdot 2.575$$

$$35.179 < \mu < 38.821$$

Úloha 4. Z produkce jsme náhodně vybrali 250 kusů a zjistili, že 10 z nich je nekvalitních. Určete 95 % interval spolehlivosti pro podíl nekvalitních výrobků v produkci.

$$p = \frac{m}{n} = \frac{10}{250} = 0.04$$

otestujeme předpoklad $np(1-p) \geq 5$

$$250 \cdot 0.04 \cdot 0.96 = 9.6 > 9 \quad \text{v pořádku}$$

$$\alpha = 0.05 \dots u_{\frac{\alpha}{2}} = u_{0.025} = 1.96$$

$$0.04 - \sqrt{\frac{0.04 \cdot 0.96}{250}} \cdot 1.96 \leq \pi \leq 0.04 + \sqrt{\frac{0.04 \cdot 0.96}{250}} \cdot 1.9$$

$$0.0157 \leq \pi \leq 0.0643$$

S pravděpodobností 95 % si můžeme být jisti, že podíl nekvalitních výrobků se pohybuje mezi 1,57 - 6,43 procenty.

Úloha 5. Náhodný výběr je popsán následující variační řadou

x_i	0	1	2	3	4
f_i	3	4	6	5	2

Určete

a) bodové odhady

b) intervalové odhady se stupněm spolehlivosti 95 %

střední hodnoty a rozptylu základního souboru, z něhož byl náhodný výběr proveden.

bodové odhady:

$$n = 20 \quad \bar{x} = \frac{4 + 12 + 15 + 8}{20} = 1.95 = \hat{\mu}$$

$$s_x^2 = \frac{0 + 4 + 24 + 45 + 323}{20} - 1.95^2 = 1.4475 \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{20}{19} 1.4475 = 1.5237$$

intervalový odhad střední hodnoty:

$$\alpha = 0.05 \dots t_{0.05}(19) = 2.093, n < 30$$

$$1.95 - \sqrt{\frac{1.4475}{19}} \cdot 2.093 \leq \mu \leq 1.95 + \sqrt{\frac{1.4475}{19}} \cdot 2.093$$

$$1.3723 \leq \mu \leq 2.5278$$

intervalový odhad rozptylu:

$$\chi_{0.025}^2(19) = 32.8523, \chi_{0.975}^2(19) = 8.9065$$

$$\frac{20 \cdot 1.4475}{32.8523} \leq \sigma^2 \leq \frac{20 \cdot 1.4475}{8.9065}$$

$$0.8812 \leq \sigma^2 \leq 3.2504$$