

1 SNV obecné

Úloha 1. Prodejna očekává dodávku nového zboží v určitý den. Čas dodávky je náhodná veličina, která nabývá hodnot od 8 do 10 hodin. Podle sdělení dodavatele je uskutečnění dodávky stejně možné kdykoliv během tohoto časového intervalu. Určete funkci hustoty rozdělení této náhodné veličiny, příslušnou distribuční funkci a vypočtěte pravděpodobnost toho, že zboží bude dodáno v době od devíti hodin do čtvrt na deset. Určete typ rozložení

$$\left[\begin{array}{l} X \sim R(8, 10) \\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \notin \langle 8, 10 \rangle \\ 0.5 & \text{pro } x \in \langle 8, 10 \rangle \end{cases} \\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 8 \\ \frac{x-8}{10-8} & \text{pro } x \in \langle 8, 10 \rangle \\ 1 & \text{pro } x > 10 \end{cases} \\ P(9 \leq X \leq 9.25) = \frac{9.25 - 8}{10 - 8} - \frac{9 - 8}{10 - 8} = 0,125 \end{array} \right.$$

Úloha 2. Průměrný počet hvězd, které můžete spatřit padat během jedné hodiny, za jasné letní noci, je 5. Jaká je pravděpodobnost, že během takové letní noci za celou půlhodinu nespátříte padat ani jednu hvězdu?

$$\left[\begin{array}{l} 5 \text{ za } 60 \text{ minut} \dots 2.5 \text{ za } 30 \text{ minut tj } X \sim Po(2.5) \\ P(X = 0) = \frac{2.5^0}{0!} e^{-2.5} = 0.08208 \\ \text{nebo průměrně čekáte na jednu hvězdu } 12 \text{ minut tj } X \sim Ex(\frac{1}{12}) \\ P(X > 30) = 1 - F(30) = 1 - [1 - e^{-\frac{1}{12} \cdot 30}] = e^{-2.5} = 0.08208 \end{array} \right.$$

Úloha 3. Soupravy metra odjíždějí ze stanice ve 4-minutových intervalech. Cestující může přijít do stanice v libovolném okamžiku. Jaká je střední hodnota a směrodatná odchylka doby jeho čekání na odjezd ze stanice?

$$\left[\begin{array}{l} X \sim R(0, 4), EX = \frac{0+4}{2}, \sigma = \sqrt{\frac{(4-0)^2}{12}} = 1,1547 \end{array} \right.$$

Úloha 4. Dlouhodobým pozorováním bylo zjištěno, že pohotovostní ambulanci navštíví o víkendu co 10 minut jeden pacient. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybranou sobotu bude doba mezi dvěma příchody pacientů na tuto ambulanci delší než 15 minut?

$$\begin{aligned}
 &X \sim Ex\left(\frac{1}{10}\right) \Rightarrow \\
 &P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - F(15) = 1 - 0,7769 = 0.2231 \\
 &\text{nebo průměrně 6 pacientů za hodinu, tj } X \sim Po(1,5) \\
 &P(X = 30) = e^{-1,5} = 0.2231
 \end{aligned}$$

Úloha 5. Do prodejny přichází v průměru 15 lidí za hodinu. Jaká je pravděpodobnost, že bude prodavačka čekat nejméně 5 minut na prvního zákazníka?

$$\begin{aligned}
 &X \sim Ex(4) \Rightarrow \\
 &P(X > 5) = 1 - P(X \leq 5) = 1 - F(5) = 1 - 0,7135 = 0.2865 \\
 &\text{nebo průměrně 15 lidí za hodinu, tj } X \sim Po\left(\frac{15}{12}\right) \\
 &P(X = 0) = e^{-\frac{15}{12}} = 0.2865
 \end{aligned}$$

2 Normální rozložení

Úloha 6. Náhodná veličina X má základní normální rozdělení $N(0, 1)$. Učete pravděpodobnost, že nabude hodnoty, která bude

- a) menší než 2,85
- b) větší než 1,43
- c) v mezích od -2 do 1

$$\begin{aligned}
 &a) P(X < 2,85) = P(X \leq 2,85) = \Phi(2,85) = 0,99781 \\
 &b) P(X > 1,43) = 1 - \Phi(1,43) = 1 - 0,92364 = 0,07636 \\
 &c) P(-2 < X < 1) = \Phi(1) - \Phi(-2) = 0,81859
 \end{aligned}$$

Úloha 7. Náhodná veličina X má obecné normální rozložení se střední hodnotou $\mu = 10$ a rozptylem $\sigma^2 = 16$. Určete pravděpodobnost, že X nabude hodnoty

- a) 10
- b) kladné
- c) v mezích od 8 do 14

$$a) P(X = 10) = 0$$

$$b) P(X > 0) = 1 - F(0) = 1 - \Phi\left(\frac{0-10}{4}\right) = 1 - \Phi(-2,5) = 1 - 0,99379 = 0,00621$$

$$c) P(8 < X < 14) = F(14) - F(8) = \Phi\left(\frac{14-10}{4}\right) - \Phi\left(\frac{8-10}{4}\right) = 0,84134 - 0,30854 = 0,53281$$

Úloha 8. Doba, za kterou Vám přivezou objednanou pizzu se řídí normálním rozložením. Doručení zabere v průměru 22 minut se směrodatnou odchylkou 4minuty. V jakém intervalu můžeme s pravděpodobností 96% očekávat doručení pizzy? Příslušnou pravděpodobnost graficky znázorněte.

$$X \sim N(22, 4^2) \quad P(x_D \leq X \leq x_H) = 0.96 \quad 1 - 0.96 = 0.04 \quad \frac{0.04}{2} = 0.02$$

$$F(x_D) = 0.02 \quad F(x_H) = 0,98$$

S pravděpodobností 96% můžeme očekávat dovoz pizzy v rozmezí 13,785 a 30,215 minut.

Úloha 9. Hodnota IQ v neznámkově se řídí normálním rozložením se střední hodnotou 32 a směrodatnou odchylkou 12. Aby se obyvatel neznámkova dostal do místní MENSY musí mít IQ nejméně 30. Jaká je pravděpodobnost, že má náhodně vybraný obyvatel neznámkova šanci se do této MENSY dostat? Situaci graficky znázorněte.

$$X \sim N(32; 12^2)$$

$$P(X > 30) = 1 - F(30) = 1 - 0,43382 = 0,56618$$

Úloha 10. Váha výrobku je vyhovující, jestliže je v mezích 99,4-100,6 gramů. Za standardních podmínek jsou váhy rozděleny podle normálního zákona, se střední hodnotou 100g a směrodatnou odchylkou 0,25g. Jaká je pravděpodobnost, že váha náhodně vybraného výrobku nebude v předepsaných mezích?

$$X \sim N(100; 0,25^2)$$

$$P(99,4 \leq X \leq 100,6) = F(100,6) - F(99,4) = 0.9918 - 0.0082 = 0.9836$$

Úloha 11. Počet bodů na závěrečné písemce se řídí normálním rozložením se střední hodnotou 7,6 a směrodatnou odchylkou 2,4. Minimum pro úspěšné zvládnutí písemky je 6b. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný student úspěšně zvládne písemku?

$$X \sim N(7,6; 2,4^2)$$

$$P(X > 6) = 1 - F(6) = 1 - \Phi\left(\frac{6 - 7,6}{2,4}\right) = 0,74751$$

Úloha 12. [přesně i aproximace] Pravděpodobnost, že při daném výrobním procesu bude

na určitém stroji vyroben vadný výrobek, je rovna 0,04. Jaká je pravděpodobnost, že z 250 vyrobených výrobků bude:

- a) počet vadných výrobků bude 10
- b) počet vadných výrobků bude alespoň 5, ale nejvýše 15

$$X \sim Bi(250; 0,04)$$

- a) přesně binomickým je to $P(X = 10) = 0,12769$, aproximace Poissonovým $Po(250 \cdot 0,04)$ dává 0,12511, aproximace normálním $X \sim N(250 \cdot 0,04, 250 \cdot 0,04 \cdot 0,96) = N(10; 9,6)$:

$$P(9,5 \leq X \leq 10,5) = F(10,5) - F(9,5) = 0,1282$$

- b) přesně binomickým je to $P(5 \leq X \leq 15) = F(15) - F(4) = 0,92776$, aproximace normálním $X \sim N(10; 9,6)$:

$$P(4,5 \leq X \leq 15,5) = F(15,5) - F(4,5) = 0,92412$$

Úloha 13. [přesně i aproximace] Budeme-li kostkou házet celkem 1000 krát, jaká je pravděpodobnost, že nám šestka padne

- a) přesně 166 krát
- b) méně než 160krát

$$X \sim Bi(1000; \frac{1}{6}) = 0,03383$$

- a) přesně binomickým je to $P(X = 166) = 0,12769$, aproximace normálním $X \sim N(1000 \cdot \frac{1}{6}, 1000 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}) = N(166,67; 138,89)$:

$$P(165,5 \leq X \leq 166,5) = 0,03379$$

- b) přesně binomickým je to $P(X < 160) = F(159) = 0,27355$, aproximace normálním :

$$P(X \leq 159,5) = F(159,5) = 0,27156$$