

1 Diskrétní náhodná veličina, obecně

Úloha 1. Rozhodněte, zda může být následující funkce pravděpodobnostní funkcí náhodné veličiny X ,

a) $p(x) = \frac{A}{x+2}$ jeli-obor možných hodnot X množina $\{-1, 0, 1, 2\}$.

b) $p(x_i) = c \cdot (\frac{3}{4})^{x_i}$, kde $x_i = 0, 1, 2, 3, \dots$

a) ano, $A = 0,48$

b) ano, $c = 0,25$

Úloha 2. Náhodná proměnná X je dána tabulkou zákona rozložení pravděpodobností

x_i	2	4	6	8
$p(x_i)$	0,2	0,3	0,4	0,1

a) ověřte vlastnosti pravděpodobnostní funkce

b) určete distribuční funkci $F(x)$ a pomocí ní určete $P(X \leq 5)$, $P(2 < X \leq 8)$, $P(X > 4)$ a $P(X < 4)$.

a) $0,2 + 0,3 + 0,4 + 0,1 = 1$

b) $F(x) = P(X \leq x)$

x	$(-\infty, 2)$	$\langle 2, 4)$	$\langle 4, 6)$	$\langle 6, 8)$	$\langle 8, +\infty)$
$p(x_i)$	0	0,2	0,5	0,9	1

$$P(X \leq 5) = F(5) = 0,5$$

$$P(2 < X \leq 8) = F(8) - F(2) = 1 - 0,2 = 0,8$$

$$P(X > 4) = 1 - F(4) = 0,5$$

$$P(X < 4) = P(X \leq 2) = F(2) = 0,2$$

Úloha 3. V osudí jsou koule s čísly 1,2,3,4,5 v poměru 3:5:1:4:2. Náhodnou proměnnou je číslo na vytážené kouli. Určete zákon rozložení pravděpodobností a základní charakteristiky, tj. střední hodnotu, rozptyl, směrodatnou odchylku, medián a modus.

x	1	2	3	4	5
$p(x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$

$$EX = 2,8; Var(X) = 1,8933; \sigma = 1,376, Me = 2; Mo = 2$$

Úloha 4. Na rušné ulici dochází co 8 hodin k dopravní nehodě. Jaká je pravděpodobnost, že zde během celého dne nedojde ani k jedné dopravní nehodě?

$$\left[\begin{array}{l} X \sim Po(3) \Rightarrow P(X = 0) = \frac{3^0}{0!} \cdot e^{-3} = e^{-3} = 0,049787 \\ \text{nebo} \\ X \sim Ex\left(\frac{1}{8}\right) \Rightarrow P(X > 24) = 1 - [1 - e^{-\frac{24}{8}}] = e^{-3} = 0,049787 \end{array} \right.$$

2 Vybrané typy DNV

Úloha 5. Hokejista provádí 3 trestná střelení. Pravděpodobnost proměnění jednoho je 0,6. Určete zákon rozdělení pravděpodobnosti počtu proměněných trestných střelení, určete distribuční funkci. Určete a symbolicky запиšte typ rozložení.

$$\left[\begin{array}{l} X \sim Bi(3, 0.6), \mathcal{D} = \{0, 1, 2, 3\} \end{array} \right.$$

x_i	0	1	2	3
$p(x_i)$	0,064	0,288	0,432	0,216

x	$(-\infty, 0)$	$\langle 0, 1)$	$\langle 1, 2)$	$\langle 2, 3)$	$\langle 3, +\infty)$
$p(x_i)$	0	0,064	0,352	0,784	1

Úloha 6. V sérii 20 výrobků je 5 zmetků. Ze série jsou náhodně vybrány 3 výrobky. Považujte počet zmetků ve výběru za náhodnou veličinu a do tabulky uspořádejte pravděpodobnosti možných hodnot této náhodné veličiny, za předpokladu, že jde o výběr:

a) s vrácením

b) bez vrácení

Určete a symbolicky запиšte typ rozložení.

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) } X \sim Bi(3, 0.25) \\ \\ \text{b) } X \sim H(3, 5, 20) \end{array} \right.$$

x_i	0	1	2	3
$p(x_i)$	0,4219	0,4219	0,1406	0,01563

x_i	0	1	2	3
$p(x_i)$	0,3991	0,4605	0,1316	0,008772

Úloha 7. Pro každý kontrolovaný výrobek je pravděpodobnost, že vydrží zkoušku pevnosti v tahu 0,9. Kontrola končí ihned, jakmile první výrobek zkoušku nevydrží. Sestavte zá-

kon rozložení pravděpodobnosti počtu zkontrolovaných výrobků a určete distribuční funkci. Určete a symbolicky запиšte typ rozložení.

$X \sim$ počet zkontrolovaných výrobků, $\mathcal{D} = \{1, 2, 3, \dots\}$, $p(x_i) = (1 - p)^{x_i-1} \cdot p$, kde p je pravděpodobnost ukončení kontroly.

x_i	1	2	3	4	...
$p(x_i)$	0,1	$0,9 \cdot 0,1$	$0,9^2 \cdot 0,1$	$0,9^3 \cdot 0,1$	...
$p(x_i)$	0,1	0,09	0,081	0,0729	...

Geometrické rozložení bývá definováno jako počet událostí, které předcházejí ukončení procesu, tj. je-li X počet výrobků, které vydržely zkoušku pevnosti než se narážilo na první výrobek, který zkoušku nevydržel, pak $X \sim G(0, 1)$, $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, a $p(x_i) = p(1 - p)^{x_i}$

x_i	0	1	2	3	...
$p(x_i)$	0,1	0,09	0,081	0,0729	...

Úloha 8. Mezi 100 výrobky jsou 4 % zmetků. Určete typ rozložení počtu zmetků mezi 6 kontrolovanými výrobky a pravděpodobnost výskytu nejvýše 1 zmetku mezi kontrolovanými.

Tj. mezi 100 výrobky jsou 4 zmetky a 96 je v pořádku. $X \sim H(6, 4, 100)$, $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

x_i	0	1	2	3	4
$p(x_i)$	0,7777	0,2051	0,01672	$4,794 \cdot 10^{-4}$	$3,825 \cdot 10^{-6}$

Úloha 9. Pletací automat pracuje s 4% zmetkovostí. Určete typ rozložení počtu zmetků mezi 6 kontrolovanými výrobky a pravděpodobnost výskytu nejvýše 1 zmetku mezi kontrolovanými.

Tj. každý výrobek bude zmetkový s 4% pravděpodobností. $X \sim Bi(6, 0.04)$, $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

x_i	0	1	2	3
$p(x_i)$	0,7828	0,1957	0,02038	$1,132 \cdot 10^{-3}$
x_i	4	5	6	
$p(x_i)$	$3,539 \cdot 10^{-5}$	$5,898 \cdot 10^{-7}$	$4,096 \cdot 10^{-9}$	

Úloha 10. Házíme kostkou tak dlouho, dokud nám nepadne šestka. Určete typ rozložení počtu hodů před prvním hozením šestky a pravděpodobnost, že se nám podaří šestku hodit v jednom z prvních třech hodů.

$X \sim G(\frac{1}{6})$, $\mathcal{D} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $p(x_i) = p \cdot (1 - p)^{x_i}$

$$P(X \leq 2) = p(0) + p(1) + p(2) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = 0,4213.$$

Úloha 11. [aproximace i přesně] Na 1000 lidí připadá v průměru 8 leváků. Určete pravděpodobnost toho, že mezi 100 náhodně vybranými lidmi nebude ani jeden levák.

- $X \sim Bi(100, \frac{8}{1000}): P(X = 0) = (1 - \frac{8}{1000})^{100} = 0,4479$
- $X \approx Po(100 \cdot \frac{8}{1000}) = Po(0,8): P(X = 0) = e^{-0,8} = 0,4493$

Úloha 12. [aproximace i přesně] Pravděpodobnost, že součástka nevyhoví při kontrole spolehlivosti je 0,02. Určete pravděpodobnost toho, že při kontrole 1000 součástek nevyhoví alespoň 5 součástek.

- $X \sim Bi(1000; 0,02): P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 0,999985$
- $X \approx Po(1000 \cdot 0,02) = Po(20): P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) = 0,999983$

Úloha 13. Za jasné letní noci můžete vidět padat v průměru 2 hvězdy za hodinu. Jaká je pravděpodobnost, že

- a) během hodiny uvidíte padat právě 2 hvězdy?
- b) během 3 hodin uvidíte padat právě 6 hvězd?
- c) Jaká je pravděpodobnost, že během čtvrt hodiny uvidíte padat alespoň jednu hvězdu?

- a) $X \sim Po(2) \Rightarrow P(X = 2) = 0,2707$
- b) $X \sim Po(2 \cdot 3) \Rightarrow P(X = 6) = 0,1606$
- c) $X \sim Po(2 \cdot \frac{1}{4}) \Rightarrow 1 - P(X = 0) = 1 - 0,6065 = 0,3935$

Úloha 14. U zkoušky ze statistiky si student náhodně vybral 3 otázky ze 30. K úspěšnému složení zkoušky stačí řádně odpovědět alespoň na 2 otázky. Jaká je pravděpodobnost, že student zkoušku udělal, nastudoval-li pouze 70% otázek?

$X \sim H(3, 21, 30)$... počet správně zodpovězených otázek ze tří

$$P(X \geq 2) = \frac{\binom{21}{2} \binom{9}{1} + \binom{21}{3} \binom{9}{0}}{\binom{30}{3}} = 0,7931$$

Úloha 15. Automatická pračka má za 10 000 hodin chodu průměrně 12 poruch. Určete pravděpodobnost alespoň jedné poruchy pračky za 1 000 hodin chodu.

$$X \sim Po(1,2): P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-1,2} = 0,6988$$

Úloha 16. Prodáváč tvrdí, že mu přijde do obchodu v průměru 8 lidí za hodinu. Pobyli jsme v jeho obchodě od 10 do 12 a napočítali jsme pouze 6 zákazníků. Jaká je pravděpodobnost takového jevu?

$$\left[X \sim Po(16) \Rightarrow P(X = 6) = \frac{16^6}{6!} e^{-16} = 0,002622 \right.$$

Úloha 17. Prodáváč tvrdí, že mu přijde do obchodu v průměru 15 lidí za hodinu. Pobyli jsme v jeho obchodě od 14 do 14:30 a napočítali jsme pouze 5 zákazníků. Jaká je pravděpodobnost takového jevu?

$$\left[X \sim Po(7,5) \Rightarrow P(X = 5) = \frac{7,5^5}{5!} \cdot e^{-7,5} = 0,10934 \right.$$

Úloha 18. Do ordinace přichází v průměru 5 lidí za hodinu. Jaká je pravděpodobnost, že během půl hodiny přijde nejvýše jeden pacient?

$$\left[X \sim Po(2,5) \Rightarrow P(X \leq 1) = 0,0821 + 0,2052 = 0,2873 \right.$$

Úloha 19. Mezi 50 součástkami je 8% zmetků. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 3 výrobky jsou alespoň dva zmetky?

$$\left[\begin{array}{l} \text{počet zmetků mezi třemi } X \sim H(3, 4, 50) \\ \\ P(X \geq 2) = \frac{\binom{46}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{50}{3}} + \frac{\binom{46}{0} \cdot \binom{4}{3}}{\binom{50}{3}} = \frac{280}{19600} = 0,014286 \end{array} \right.$$

Úloha 20. Při výrobě výlisků se na určitém lisu dosahuje 8% zmetkovosti. Náhodně byly ke kontrole odebrány 3 výlisky. Jaká je pravděpodobnost, že mezi těmito třemi výlisky jsou alespoň dva zmetky?

$$\left[\begin{array}{l} \text{počet zmetků mezi třemi } X \sim Bi(3, 0.08) \\ \\ P(X \geq 2) = \binom{3}{2} \cdot 0.08^2 \cdot 0.92 + 0.08^3 = 0,017664 + 0,000512 = 0,018176 \end{array} \right.$$