1 Bernoulliho poslouponost

Úloha 1. Pravděpodobnost, že se narodí dívka je 0,55 a u kluka je to 0,45. Jaká je pravděpodobnost, že rodina se čtyřmi dětmi má aspoň jednu dceru?

$X \sim Bi(0,55;4)$

$$1 - P(B_0) = 1 - (1 - 0.55)^4 = 0,959$$

Úloha 2. 4 rovnocenní hráči A, B, C, D hrají společenskou hru. Určete, zda je pravděpodobnější, že hráč A vyhraje 3 ze 4 partií nebo 5 z 8 partií.

3 ze 4:

$$P(B_3) = \binom{4}{3} \cdot 0,25^3 \cdot (0,75)^{4-3} = 0,04688$$

$$P(B_5) = \binom{8}{5} \cdot 0,25^5 \cdot (0,75)^{8-5} = 0,02307$$

Úloha 3. Petr si koupil 57 losů. Pravděpodobnost výhry u každého z těchtot losů je 0,1.

a) S jakou pravděpodobností nebude výherní ani jeden?

b) S jakou pravděpodobností budou všechny výherní?

c) S jakou pravděpodobností má šanci na výhru?

d) Kolik losů by musel koupit, aby pravděpodobnost, že něco vyhraje byla větší než 99,9%?

a) $P(B_0) = 0.9^{57} = 0,002465$

b) $P(B_{57}) = 0.1^{57} = 10^{-57}$

c) $1 - P(B_0) = 0.9975$

d)

$$P(B_1 + B_2 + \cdots + B_n) = 1 - P(B_0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0,9^0 \cdot (1 - 0,9)^n = 1 - 0,9^n$$

$$\begin{aligned} 1 - 0,9^n &\geq 0,999 \\ \ln 0,001 &\geq n \cdot \ln 0,9 \\ \frac{\ln 0,001}{\ln 0,9} &\leq n \\ 65,56 &\geq n \ldots 66 \text{ krát} \end{aligned}$$

Úloha 4. Jedním výstřelem zasáhne lovec cíl s pravděpodobností 0,6. Kolikrát musí nezávisle na sobě vystřelit, aby cíl byl zasažen s pravděpodobností alespoň 0,99?

$$1 - P(B_0) = 1 - \binom{n}{0} \cdot 0,6^0 \cdot (1-0,6)^n = 1 - 0,4^n$$

$$\begin{aligned} 1 - 0,4^n &\geq 0,99 \\ \ln 0,01 &\geq n \cdot \ln 0,4 \\ \frac{\ln 0,01}{\ln 0,4} &\leq n \\ 5,0259 &\leq n \ldots 6 \text{ krát} \end{aligned}$$

Úloha 5. Při výrobě výlisků se na určitém listu dosahuje 85% bezvadných výrobků. Náhodně bylo ke kontrole odebráno 50 výlisků. Určete kolik je mezi nimi s největší pravděpodobností bezvadných.

43 výrobků:

$$n \cdot p - 1 \leq k_0 \leq n \cdot p$$
$$51 \cdot 0,85 - 1 \leq k_0 \leq 51 \cdot 0,85$$
$$43,35 - 1 \leq k_0 \leq 43,35$$

Úloha 6. Kolikrát musíme hodit třemi kostkami, aby pravděpodobnost jevu, že alespoň jednou padne 18 teček, byla větší než jedna třetina?

88 krát:

2 Úplná pravděpodobnost a Bayesův vzorec

Úloha 7. Mějme dvě série výrobků po 10ti a 20ti kusech, přičemž v každé sérii je jeden zmetek. Náhodně zvolený výrobek jsme přemístili z 1. série do 2, načež jsme náhodně vybrali jeden výrobek z 2. série. Určete pravděpodobnost toho, že z 2. série byl vytažen zmetek.

$$P(Z) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(Z|H_i) = P(H_1) \cdot P(Z|H_1) + P(H_2) \cdot P(Z|H_2) =$$

$$= \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{21} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{21} = \frac{11}{210} = 0,05238$$

Úloha 8. V zásuvce je 10 tenisových míčků, z toho 6 nových. Pro první hru se náhodně vezmou tři míčky, které se po skončení hry zase vrátí do zásuvky. Pro druhou hru se znovu náhodně vezmou 3 míčky. Určete pravděpodobnost toho, že všechny 3 míčky pro druhou hru jsou nové.

Jev S_i značí, že jsme pro první hru vytáhli i starých míčků a tedy $3 - i$ nových a z těchto jsme udělali hrou staré.

$$P(A) = \sum_{i=0}^{3} P(S_i) \cdot P(A|S_i) =$$

$$= \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{4}{0}}{\binom{10}{3}} \cdot \frac{\binom{3}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{10}{3}} \cdot \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{6}{1} \cdot \binom{4}{2}}{\binom{10}{3}} \cdot \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{\binom{6}{0} \cdot \binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} \cdot \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} =$$

$$= \frac{700}{14400} = 0,04861$$

Úloha 9. K montáži přicházejí součástky ze 3 automatů. Je známo, že první automat produkuje 1% zmetků, druhý 2% a třetí 3% zmetků.

a) Jaká je pravděpodobnost, že k montáži přijde zmetek, jestliže první automat dodává 300 součástek, druhý 200 součástek a třetí 100 součástek?

b) K montáži přišel zmetek. Určete, na kterém automatu byl s největší pravděpodobností vyroben.

$$a) \qquad P(Z) = 0.5 \cdot 0.01 + 0.333 \cdot 0.02 + 0.167 \cdot 0.03 = 0.01667$$

$$b) \qquad P(A_1|Z) = \frac{P(Z|A_1) \cdot P(A_1)}{P(Z)} = \frac{0.5 \cdot 0.01}{0.01667} = 0.2999$$

$$P(A_2|Z) = \frac{P(Z|A_2) \cdot P(A_2)}{P(Z)} = \frac{0.333 \cdot 0.02}{0.01667} = 0.3945 \Rightarrow MAX$$

$$P(A_3|Z) = \frac{P(Z|A_3) \cdot P(A_3)}{P(Z)} = \frac{0.167 \cdot 0.03}{0.01667} = 0.3005$$

Úloha 10. Šest střelců z 20ti zasáhne terč s pravděpodobností 0,8, sedm dalších s pravděpodobností 0,7, pět s pravděpodobností 0,6 a dva s pravděpodobností 0,5. Náhodně zvolený střelec vystřelil, ale terč nezasáhl. Do které skupiny tento střelec s největší pravděpodobností patří?

A …zasáhl terč, H_2 …střílel druhý střelec

$$P(A) = 0,685 \qquad P(A') = 0.315$$

$$P(H_2|A') = \frac{P(A'|H_2) \cdot P(H_2)}{P(A')} = 0.3333$$