

1 kombinatorika

Úloha 1. Kolik existuje pěticiferných čísel sestavených z číslic 0,1,2 ... 9

- a) mohou-li se číslice opakovat;
- b) nemohou-li se číslice opakovat.

Kolik z těchto čísel je menších než 40 000?

všechna:

a) $V'_5(10) - V'_4(10) = 90\,000$

b) $V_5(10) - V_4(10) = 27\,216$

menší než 40 000:

a) $3 \cdot V'_4(10) = 30\,000$

b) $3 \cdot V_4(9) = 9\,072$

Úloha 2. Kolik různých slov (nemusí nutně dávat smysl) lze sestavit z písmen slova

- a) obligace;
- b) statistika.

a)

$$P(8) = 40\,320$$

b)

$$P'_{3,2,2,2,1}(10) = \frac{10!}{3!2!2!2!1!} = 75\,600$$

2 Jevy

Úloha 3. Barevný televizor je podroben třem různým vstupním zkouškám. Jev A spočívá v tom, že náhodně vybraný televizor obstojí při první zkoušce. Jev B v tom, že obstojí ve druhé a jev C v tom, že obstojí ve třetí zkoušce. Vyjádřete v používané symbolice, že televizor obstojí:

- a) jen v první zkoušce
- b) v první a ve druhé, ale neobstojí ve třetí zkoušce
- c) ve všech třech zkouškách

- d) alespoň v jedné zkoušce
- e) právě v jedné zkoušce
- f) alespoň ve dvou zkouškách
- g) nejvýše ve dvou zkouškách

- | |
|--|
| <ul style="list-style-type: none"> a) $A \cdot B' \cdot C'$ b) $A \cdot B \cdot C'$ c) $A \cdot B \cdot C$ d) $A + B + C$ e) $A \cdot B' \cdot C' + A' \cdot B \cdot C' + A' \cdot B' \cdot C$ f) $A \cdot B \cdot C' + A \cdot B' \cdot C + A \cdot B \cdot C' + A \cdot B \cdot C$ g) $(A \cdot B \cdot C)'$ |
|--|

Úloha 4. Při hodu kostkou značí:

jev A - padne sudé číslo menší než pět

jev B - padne liché číslo větší než dvě

jev C - padne jednička

Zjistěte, zda jsou jevy A,B,C navzájem disjunktní. Pokud ano, určete jev D tak, aby jevy A,B,C,D tvořily úplný systém navzájem neslučitelných jevů.

<p>D ...padne šestka</p>

Úloha 5. Při nácviu střelby na terč má střelec k dispozici 10 střel. Jev Z znamená, že zasáhne terč:

- a) alespoň třikrát
- b) nejvýše třikrát
- c) ani jednou
- d) právě třikrát
- e) alespoň třikrát a nejvýše pětkrát
- f) ani jednou nebo alespoň dvakrát
- g) pokaždé

Kolikrát střelec zasáhl teč, jestliže nastal jev $\bar{Z}$?

- a) nanejvýš dvakrát
- b) alespoň čtyřikrát
- c) alespoň jednou
- d) nejvýše dvakrát nebo alespoň čtyřikrát
- e) nejvýše dvakrát nebo alespoň šestkrát
- f) právě jednou
- g) nanejvýš devětkrát

3 Klasická pravděpodobnost, pravděpodobnost součtu, součinu, podmíněná

Úloha 6. Kolik různých slov můžeme vytvořit z písmen slova "FUTURAMA"? Jaká je pravděpodobnost, že vytvoříme právě toto slovo "FUTURAMA"?

$$x = \frac{8!}{1!2!1!1!2!1!} = 10\,080$$

$$P = \frac{1}{10080} = 0.0009259$$

Úloha 7. Je jednodušší hodit v šesti hodech za sebou 6 dvojek nebo postupku?

$$P(A) = \frac{1}{6^6} = 0,0000214 \quad P(A) = \frac{2}{6^6} = 0,0000429$$

Úloha 8. Náhodný pokus spočívá ve vytažení dvou karet po sobě bez vracení z dobee zamíchané hry 32 karet. jaká je pravděpodobnost, že

- a) vytáhnu dvě esa za sebou
- b) vytáhnu eso a pak královnu

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} = \frac{12}{132} = 0,091 \\ \text{b)} \quad & \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{16}{132} = 0,121 \end{aligned}$$

Úloha 9. Ze hry 32 karet se náhodně vyberou 4 karty. Určete pravděpodobnost, že mezi nimi budou

- a) právě dvě sedmičky
b) alespoň jedna desítka

$$\left[\begin{array}{l} \text{a)} \\ \text{b)} \end{array} \right. \quad \frac{\binom{4}{2} \binom{28}{2}}{\binom{32}{4}} = \binom{4}{2} \cdot \frac{4}{32} \cdot \frac{3}{31} \cdot \frac{28}{30} \cdot \frac{27}{29} = 0,0631$$

$$1 - \frac{\binom{8}{0} \cdot \binom{24}{4}}{\binom{32}{4}} = 0,7045$$

Úloha 10. Je jednodušší hodit kostkou právě jednu dvojku ze 3 pokusů, nebo právě dvě dvojky z 6 pokusů?

$$\left[\begin{array}{l} P(A) = \binom{3}{1} \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 0,3472 \\ P(A) = \binom{6}{2} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 0,2009 \end{array} \right.$$

Úloha 11. Náhodně vyberete kartu z balíčku 32 kanastových karet. jaká je pravděpodobnost, že vytažená karta

- a) bude kárová dáma
b) bude kárová nebo dáma

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) jedná se o jevy nezávislé} \\ \text{b) jevy nejsou disjunktní} \end{array} \right. \quad P(KD) = \frac{1}{32} = P(K)P(D|K) = P(K) \cdot P(D) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = 0,03125$$

$$P(K + D) = P(K) + P(D) - P(KD) = \frac{8+3}{32} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{32} = 0,3438$$

Úloha 12. Rodina má dvě děti. Víme, že jedno z nich je dívka. Jaká je pravděpodobnost, že obě děti jsou dívky? Pravděpodobnost narození dívky i kluka je stejná.

$$\left[P(D_2|D_1) = \frac{P(D_2 \cdot D_1)}{P(D_1)} = \frac{P(D_2)}{P(D_1)} = \frac{0,5^2}{1 - 0,5^2} = \frac{1}{3} \right]$$

Úloha 13. V závodě dorostenců ve skoku do výšky přeskochí pět skokanů základní výšku s pravděpodobnostmi postupně: 0,9; 0,7; 0,65; 0,8; 0,85. Určete pravděpodobnost, toho, že základní výšku přeskochí

- a) všichni
- b) nikdo
- c) alespoň jeden skokan
- d) právě jeden skokan

$$\left[\begin{array}{l} \text{a) } 0,2785 \\ \text{b) } 0,000315 \\ \text{c) } 0,9997 \\ \text{d) } 0,0072 \end{array} \right]$$

Úloha 14. V osudí jsou dvě bílé a tři černé koule. Vypočítejte pravděpodobnost toho, že vytáhneme bez vracení jako první kouli černou, poté kouli bílou a nakonec, jako třetí kouli černou.

$$\left[\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 0,08333 \right]$$

Úloha 15. Při losování dvou kuliček z osudí zvítězíte, pokud vytáhnete dvě bílé kuličky. V osudí jsou bílé a černé kuličky zastoupeny rovnoměrně. Vyberte, z kterého osudí byste upřednostnili losování, pokud osudí obsahují

- a) 4 kuličky
- b) 20 kuliček

$$\left[\frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{3} = 0.3333 \quad \frac{\binom{10}{2}}{\binom{20}{2}} = \frac{45}{190} = 0.2368 \right]$$

Úloha 16. U stažených závor náhodně zastavily v jednom jízdním pruhu 3 osobní automobily, 5 autobusů a 4 nákladní auta. Určete pravděpodobnost, že:

- a) vozidla stejného typu stojí bezprostředně za sebou;
- b) všechny 3 osobní vozy stojí za sebou u závor.

$$\left[\begin{array}{l} \text{a)} \\ \text{b)} \end{array} \right. \quad \frac{\frac{3!}{\frac{12!}{3!5!4!}}}{\frac{12!}{3!5!4!}} = \frac{3!4!5!3!}{12!} = 0,00021645$$

Úloha 17. V krabici je 12 červených, 8 modrých a 5 zelených kuliček. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 5ti náhodně vybranými kuličkami bude 1 zelená, 2 modré a 2 červené kuličky?

$$\left[\quad P(A) = \frac{\binom{12}{2} \binom{8}{2} \binom{5}{1}}{\binom{12+8+5}{5}} = 0,2767 \right.$$

Úloha 18. Pravděpodobnost získání zápočtu je pro daného posluchače rovna 0,8. Teprve po získání zápočtu může posluchač skládat zkoušku. Pravděpodobnost získání zápočtu i složení zkoušky v řádném termínu je rovna dvěma třetinám. Určete pravděpodobnost složení zkoušky v řádném termínu.

$$\left[\begin{array}{l} P(A_{zap}) = 0,8 \quad P(A_{zap} \cdot A_{zk}) = \frac{2}{3} \quad P(A_{zk}|A_{zap}) = ? \\ P(A_{zk}|A_{zap}) = \frac{P(A_{zap} \cdot A_{zk})}{P(A_{zap})} = 0,8333 \end{array} \right.$$

Úloha 19. Basketbalista dá koš po trestném střelení s pravděpodobností 0,8. Střílí tak dlouho, až se poprvé strefí. Jaká je pravděpodobnost, že bude střílet.

- a) právě šestkrát
b) alespoň šestkrát

$$\left[\begin{array}{l} \text{a)} \quad 0,2^5 \cdot 0,8 = 0,000256 \\ \text{b)} \quad 0,2^5 = 0,00032 \end{array} \right.$$

Úloha 20. Z dosavadních zkušeností víme, že čtyři z našich odběratelů dodržují splatnost faktury s pravděpodobností postupně: 0,9; 0,7; 0,65; 0,4. Všem čtyřem odběratelům jsme vystavili fakturu se shodným datem splatnosti. Určete pravděpodobnost toho, že

- a) všechny faktury budou včas uhrazeny
b) ani jedna z těchto faktur nebude včas uhrazen
c) alespoň jedna faktura bude včas uhrazena

d) právě jedna faktura bude včas uhrazena

a)

$$P(O_1 \cdot O_2 \cdot O_3 \cdot O_4) = 0,9 \cdot 0,7 \cdot 0,65 \cdot 0,4 = 0,1638$$

b)

$$P(B) = P(O'_1 \cdot O'_2 \cdot O'_3 \cdot O'_4) = 0,1 \cdot 0,3 \cdot 0,35 \cdot 0,6 = 0,0063$$

c)

$$P(O_1 + O_2 + O_3 + O_4) = \dots = 1 - P(B) = 0,9937$$

nebo

$$\begin{aligned} &P(O_1 + O_2 + O_3 + O_4) \\ &= P(O_1) + P(\overline{O_1} \cap O_2) + P(\overline{O_1} \cap \overline{O_2} \cap O_3) + \\ &\quad + P(\overline{O_1} \cap \overline{O_2} \cap \overline{O_3} \cap O_4) \end{aligned}$$

d)

$$P(O_1 \cdot O'_2 \cdot O'_3 \cdot O'_4) + \dots = 0,0567 + 0,0147 + 0,0117 + 0,0042 = 0,0873$$

Úloha 21. Jaká je pravděpodobnost, že při hození třemi různými hracími kostkami padne

a) součet 10;

b) padnou jenom sudá čísla.

a)

$$\begin{aligned} 10 &= 6 + 3 + 1 = 6 + 2 + 2 = 5 + 4 + 1 = 5 + 3 + 2 = 4 + 4 + 2 = 4 + 3 + 3 \\ &\frac{3! + 3 + 3! + 3! + 3 + 3}{6^3} = \frac{27}{6^3} = 0,125 \end{aligned}$$

b)

$$\frac{3^3}{6^3} = 0,125$$