DISKRÉTNÍ NÁHODNÁ VELIČINA

V praxi často narážíme na situace, kdy výsledek nějakého měření nebo procesu není jistý. Například stroj ve výrobě občas vyrobí chybný kus. Pokud sledujeme, kolik chybných kusů se za den vyrobí, náhodná veličina nabývá hodnot z množiny $\{0, 1, 2, \dots\}$ a konkrétní výsledek je její realizace.

Diskrétní náhodná veličina nabývá nejvýše spočetně mnoha jednotlivých hodnot (typicky celých čísel).

Pravděpodobnostní funkce náhodné veličiny X, označujeme $p(x)$ - každé možné hodnotě x (realizace NV) přiřazujeme pravděpodobnost jejího výskytu, tedy

$$p(x) = P(X = x)$$

Musí být splněny dvě podmínky:

1. každá pravděpodobnost $p(x)$ musí být od 0 do 1
2. součet všech možných pravděpodobností $p(x)$ je rovna 1

Distribuční funkce náhodné veličiny X, označujeme $F(x)$ - každému reálnému číslu x přiřazujeme pravděpodobnost, že nastanou výsledky maximálně této hodnoty, tedy

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Lze ji určit součtem hodnot pravděpodobnostní funkce v bodech splňující danou nerovnost, tzn.

$$F(x) = \sum_{x_i \leq x} p(x_i)$$

Vlastnosti distribuční funkce diskrétní náhodné veličiny:

1. hodnoty $F(x)$ leží mezi 0 a 1
2. je neklesající funkcí, tj. začíná v 0 a končí v 1
3. má počet bodů nespojitosti, kolik je možných realizací (schodovitý graf)

Číselné charakteristiky diskrétní náhodné veličiny

Pro stručný popis rozdělení můžeme použít také číselné charakteristiky, které shrnují důležité vlastnosti náhodné veličiny jedním číslem. Střední hodnota charakterizuje její typickou hodnotu, modus nejpravděpodobnější výsledek, směrodatná odchylka míru variability a šikmost tvar rozdělení.

Střední hodnota

$$E(X) = \mu = \sum_i x_i p(x_i)$$

Rozptyl:

$$\sigma^2 = \sum_i (x_i - \mu)^2 p(x_i)$$

Směrodatná odchylka

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Šikmost

$$A = \frac{\sum_i (x_i - \mu)^3 p(x_i)}{\sigma^3}$$

UKÁZKOVÁ ÚLOHA - KONTROLA KVALITY VE VÝROBĚ

Ve výrobním závodě probíhá výstupní kontrola kvality u náhodně vybraných výrobků. Každý výrobek může vykazovat až dva typy nezávislých vad - rozměrová (D) a povrchová (S), s pravděpodobnosti výskytu na jednom kusu $P(D) = 0,2$; $P(S) = 0,05$. Zajímá nás, kolik možných vad se může vyskytnout. Byly náhodně vybrány a zkontrolovány 2 kusy výrobků.

Náhodná veličina je definována:
$X \ldots$ celkový počet chyb ve zkontrolované dvoukusové šarži

Jedná se o diskrétní náhodnou veličinu, jelikož může nabývat pouze hodnot z množiny $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ - žádná chyba, právě jedna chyba z D/S na prvním/druhém výrobku, atd.

Na základě výpočtu podle pravidel pravděpodobnosti jsou v tabulce uvedeny hodnoty pravděpodobností pro jednotlivé realizace, přičemž jedna hodnota chybí.

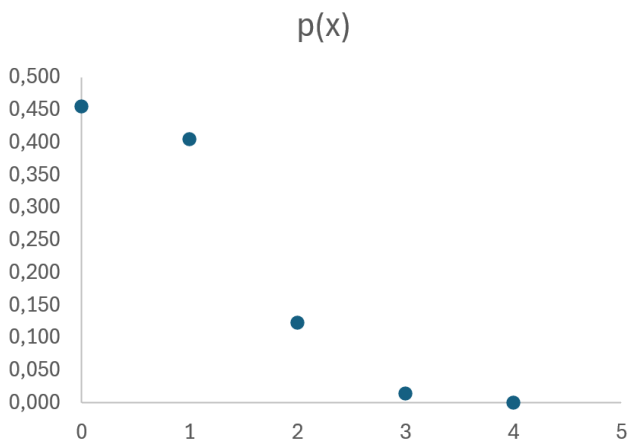
x	0	1	2	3	4
$p(x)$	0,455	0,405	???	0,015	0,001

Pro výpočet chybějící hodnoty $p(2)$ tak, aby se jednalo o pravděpodobnostní funkci, můžeme využít vlastnosti, že součet pravděpodobností všech možných realizací NV je roven jedné:

$$0,455 + 0,405 + p(2) + 0,015 + 0,001 = 1$$
$$p(2) = 1 - 0,876 = 0,124$$

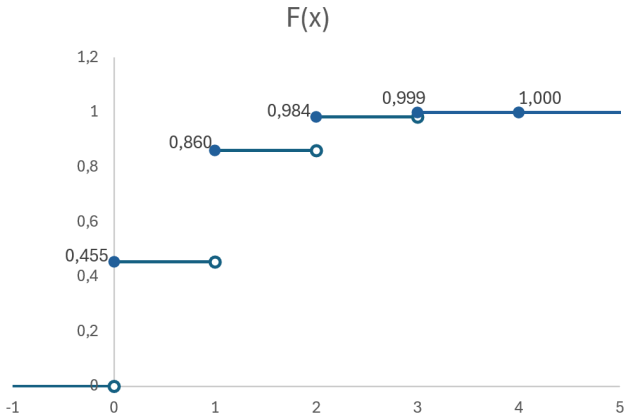
Pravděpodobnostní funkce je definovaná:

x	0	1	2	3	4
$p(x)$	0,455	0,405	0,124	0,015	0,001



Určení distribuční funkce spočívá v postupném sčítání hodnot $p(x)$:

x	(-∞, 0)	[0,1)	[1,2)	[2,3)	[3,4)	[4,+∞)
$F(x)$	0	0,455	0,860	0,984	0,999	1



Střední hodnota: $E(X) = 0 \cdot 0,455 + 1 \cdot 0,405 + 2 \cdot 0,124 + 3 \cdot 0,015 + 4 \cdot 0,001 = 0,702$

Nejvyšší pravděpodobnost má hodnota $x = 0 \Rightarrow \mathrm{Mo}(X) = 0$.

Směrodatná odchylka:

$$\sigma = \sqrt{(0 - 0,702)^2 \cdot 0,455 + (1 - 0,702)^2 \cdot 0,405 + \cdots + (4 - 0,702)^2 \cdot 0,001} = \sqrt{0,559} \approx 0,75$$

Koeficient šikmosti:

$$A = \frac{(0 - 0,702)^3 \cdot 0,455 + (1 - 0,702)^3 \cdot 0,405 + \cdots + (4 - 0,702)^3 \cdot 0,001}{0,75^3} = \frac{0,342}{0,75^3} \approx 0,811$$

Příklady

a) Automatická kontrola sleduje počet vadných součástek v balení. Náhodná veličina X udává počet vadných součástek v jednom balení. Pravděpodobnostní funkce je dána tabulkou:

x	0	1	2	3
$p(x)$	0,60	0,25	?	0,05

1) Doplňte chybějící hodnotu pravděpodobnostní funkce.

2) Určete pravděpodobnost $P(X \leq 1)$.

3) Určete hodnotu distribuční funkce pro $x = 2$.

4) Vypočítejte střední hodnotu $E(X)$.

b) Náhodná veličina X udává počet poruch zařízení během jednoho měsíce. Distribuční funkce $F(x) = P(X \leq x)$ je dána tabulkou:

x	(-∞, 0)	[0,1)	[1,2)	[2,3)	[3,4)	[4,+∞)
$F(x)$	0	0,20	0,55	0,75	0,90	1

1) Nakreslete grafy $p(X)$, $F(X)$.

2) Určete pravděpodobnost, že dojde přesně ke 2 poruchám během měsíce.

3) A jaká je šance, že dojde více než ke 2 poruchám za měsíc?

4) Určete modus NV X.

c) Náhodná veličina X udává počet restartů řídicího systému během jednoho dne. Její hodnoty a příslušné pravděpodobnosti jsou uvedeny v tabulce:

x	0	1	2	3	4	5
$p(x)$	0,45	0,21	0,10	0,09	0,08	0,03

1) Rozhodněte (zdůvodněte), zda tabulka představuje pravděpodobnostní funkci dané diskrétní náhodné veličiny. V případě, že ne, předpokládejme, že hodnota $p(5)$ byla při měření určena nesprávně. Určete hodnotu $p(5)$ tak, aby tabulka představovala pravděpodobnostní funkci.

2) Určete $P(X \leq 2)$.

3) Jaká je pravděpodobnost, že dojde během dne minimálně k jednomu a maximálně čtyřem restartům?

4) Sestavte tabulku distribuční funkce $F(x)$.

5) Určete rozptyl a znaménko koeficient šikmosti.

d) Náhodná veličina X udává počet hodin nepřetržitého provozu zařízení během jednoho pracovního cyklu. Její distribuční funkce je dána tabulkou:

x	(-∞, 0)	[0,1)	[1,2)	[2,3)	[3,4)	[4,+∞)
$F(x)$	0	0,05	0,20	0,50	0,85	1

1) Určete pravděpodobnost $P(2 < X \leq 4)$.

2) Určete pravděpodobnost $P(X > 3)$ a $P(X = 3)$.

3) Jaká je nejmenší hodnota x, pro kterou platí $F(x) \geq 0{,}5$.

4) Určete směrodatnou odchylku NV X.

5) Bude mít NV X zápornou šikmost. Zkuste odhadnout na základě grafu pravděpodobnostní funkce a ověřte výpočtem.

VÝSLEDKY

a)

1) $p(2) = 0,10$
2) $P(X \leq 1) = 0,85$
3) $F(2) = 0,95$
4) $E(X) = 0,60$

b)

2) $p(2) = 0,20$
3) $P(X > 2) = 0,25$
4) $Mo(X) = 1$

c)

1) ne, $\sum_{i=0}^{5} x_i = 0,96 \neq 1$, $p(5) = 0,07$
2) $P(X \leq 2) = 0,76$
3) $P(1 \leq X \leq 4) = 0,48$
4)

x	(-∞, 0)	[0,1)	[1,2)	[2,3)	[3,4)	[4,5)	[5,+∞)
$F(x)$	0	0,45	0,66	0,76	0,85	0,93	1

5) $D(X) = 2,63$, $A > 0$

d)

1) $P(2 < X \leq 4) = 0,50$
2) $P(X > 3) = 0,15$, $P(X = 3) = 0,35$
3) $x = 2$
4) $\sigma = 1,1$
5) ano