PRAVDĚPODOBNOST

KLASICKÁ PRAVDĚPODOBNOST

Předpokládejme, že pokus má n možných výsledků (množina Ω má n prvků) a že všechny výsledky jsou stejně pravděpodobné. Dále předpokládejme, že z těchto n výsledků jich je m příznivých jevu A (neboli množina A má m prvků, $|A| = m$). Klasická pravděpodobnost jevu A se definuje jako podíl počtu příznivých výsledků ku počtu všech možných výsledků

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Opačný jev (doplněk) k jevu A: $\bar{A} = \Omega - A$ (obsahuje všechny možné výsledky, které neodpovídají jevu A)

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

Pravděpodobnost sjednocení dvou jevů A, B se určí jako

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Neslučitelné jevy:

$$P(A \cap B) = 0 \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Příklady

a) Ze zaměstnanců firmy, ve které je 7 mužů a 4 ženy, je náhodně vybraná 6ti členná delegace. Jaká je pravděpodobnost, že v ní budou alespoň dvě ženy?

b) Žáci se za domácí úkol měli naučit odpovědi na 10 otázek. Učitel následně zkoušel žáky tak, že vybral náhodně 2 otázky, na které měl žák odpovědět. Michal se naučil vše, až na poslední dvě otázky, které nestihl. Jaká je pravděpodobnost, že se mezi jeho otázkami objeví otázka, kterou neumí odpovědět?

c) Jaká je pravděpodobnost, že při hodu kostkou padne liché číslo nebo číslo větší než 3?

d) Z 32 hracích karet vybíráme 7. Jaká je pravděpodobnost toho, že mezi nimi budou tři figury nebo dvě esa?

e) V obchodě je vystaveno 10 hrnců, z toho 2 mají skrytou chybu. Kupující si koupí dva kusy. Jaká je pravděpodobnost, že alespoň jeden z nich má skrytou chybu?

f) Volíme náhodně čtyřciferný kód. Jaká je pravděpodobnost, že má
1) všechny cifry různé,
2) aspoň dvě cifry stejné?

g) Písmena C, D, I, O, V skládací abecedy skládáme náhodně za sebou. Jaká je pravděpodobnost, že jsme složili slovo COVID?

Podmíněná pravděpodobnost

Víme, že určitý jev A nastal, a zkoumáme pravděpodobnost jevu B za této podmínky. Podmíněná pravděpodobnost jevu B za podmínky, že nastal jev A, je

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Podmíněnou pravděpodobnost ovšem nemusíme vždy počítat podle tohoto vzorce, někdy je lepší přímý výpočet. Často spíše naopak počítáme pravděpodobnost průniku jako

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Jevy A, B jsou nezávislé, jestliže to, že nastal jev A, nijak neovlivní pravděpodobnost toho, že nastane jev B, a naopak neboli jestliže

$$P(B|A) = P(B),\ P(A|B) = P(A) \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Věta o úplné pravděpodobnosti: Vezměme systém navzájem disjunktních podmnožin (tzv. hypotéz) $H_1, \ldots, H_k$ množiny Ω, takový že $H_1 \cup \cdots \cup H_k = \Omega$. Pak

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + \cdots P(H_k) \cdot P(A|H_k).$$

Bayesův vzorec

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(A)}.$$

Příklady

a) Dvakrát hodíme kostkou. Jaká je pravděpodobnost, že součet přesáhne 10, víme-li, že padla (aspoň jedna) šestka?

b) Ve městě jsou čtyři křižovatky se světelnými semafory. Každý z nich uvolňuje nebo uzavírá dopravu se stejnou pravděpodobností 0,5. Jaká je pravděpodobnost, že auto projde všemi čtyřmi křižovatkami bez zdržení?

c) Studenti A, B a C skládají přijímací zkoušku. Jejich šance na úspěch odhadujeme po řadě na 70, 40 a 60 %. Jaká je pravděpodobnost, že
1) všichni tři uspějí,
2) ani jeden neuspěje,
3) uspěje jen student A,
4) uspěje právě jeden z nich,
5) uspějí právě dva.

d) Tři střelci, jejichž dlouhodobé úspěšnosti jsou po řadě 15 %, 35 % a 60 %, současně vystřelili na terč. V terči byl zjištěn jeden zásah. S jakou pravděpodobností terč zasáhl druhý střelec?

e) Při zásahu cíle se rozsvítí žárovka. Urči pravděpodobnost, že se žárovka rozsvítí, jestliže na terč současně vystřelí dva střelci, jejichž pravděpodobnosti zásahu jsou 0,7 a 0,9.

f) Jisté onemocnění postihuje přibližně jednoho ze 100 lidí. Pro identifikaci onemocnění existuje test, který vykazuje tyto nepřesnosti: výsledek testu je pozitivní u 2 % osob, které nemoc nemají, výsledek testu je negativní u 1 % osob, které nemoc mají. Náhodná osoba je testována s pozitivním výsledkem. Jaká je pravděpodobnost, že onemocněním opravdu trpí?

g) Pravděpodobnost, že dítě bude trpět určitou alergií, je 70 %, jsou-li oba jeho rodiče alergici, 30 %, je-li jen jeden z rodičů alergik, a 10 %, jestliže žádný z rodičů alergií netrpí. Mezi rodiči dětí, které zkoumáme, je 65 % párů, kde alergií netrpí nikdo, 25 % párů, kde má alergii jeden, a 10 % párů, v nichž mají alergii oba. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybrané dítě bude mít alergii?

h) Do podniku jsou dováženy ocelové pruty ze tří závodů. Množství prutů dodávaných jednotlivými závody je v poměru 2:3:5. První závod má mezi svými pruty 2 % nekvalitních, ostatní po 1 %. Náhodně jsme vybrali jeden prut ke kontrole. Jaká je pravděpodobnost, že byl dobrý?

Příklady k 1. části:

f) Volíme náhodně čtyřciferný kód. Jaká je pravděpodobnost, že má:
1) všechny cifry různé,
2) aspoň dvě cifry stejné?

Řešení: 1) $P(F_1) = \dfrac{V_4(10)}{V_4^*(10)} = \dfrac{\frac{10!}{6!}}{10^4} = 0{,}504$

2) $P(F_2) = 1 - P(F_1) = 0{,}496$

g) Písmena C, D, I, O, V skládací abecedy skládáme náhodně za sebou. Jaká je pravděpodobnost, že jsme složili slovo COVID?

Řešení: $P(G) = \dfrac{1}{P(5)} = \dfrac{1}{5!} \doteq 0{,}008$

Příklady k 2. části:

e) Při zásahu cíle se rozsvítí žárovka. Urči pravděpodobnost, že se žárovka rozsvítí, jestliže na terč současně vystřelí dva střelci, jejichž pravděpodobnosti zásahu jsou 0,7 a 0,9.

Řešení: A_i ... *i*-tý střelec zasáhne

A_1, A_2 ... nezávislé jevy

$$P(A) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0{,}7 + 0{,}9 - 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}97$$
$$\left(= 1 - P(\overline{A}) = 1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}1 = 0{,}97\right)$$
$$\left(= P\big((A_1 \cap A_2) \cup (\overline{A}_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap \overline{A}_2)\big) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}9 + 0{,}7 \cdot 0{,}1 = 0{,}97\right)$$

c) Studenti A, B a C skládají přijímací zkoušku. Jejich šance na úspěch odhadujeme po řadě na 70, 40 a 60%. Jaká je pravděpodobnost, že
1) všichni tři uspějí,
2) ani jeden neuspěje,
3) uspěje jen student A,
4) uspěje právě jeden z nich,
5) uspějí právě dva.

Řešení: A_X ... student *X* uspěje

A_A, A_B, A_C ... nezávislé jevy

1) $P(A) = P(A_A \cap A_B \cap A_C) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}168$

2) $P(B) = P(\overline{A}_A \cap \overline{A}_B \cap \overline{A}_C) = 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}072$

3) $P(C) = P(A_A \cap \overline{A}_B \cap \overline{A}_C) = 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}168$

4) $P(D) = P\big((A_A \cap \overline{A}_B \cap \overline{A}_C) \cup (\overline{A}_A \cap A_B \cap \overline{A}_C) \cup (\overline{A}_A \cap \overline{A}_B \cap A_C)\big) =$
$= 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}324$

5) $P(F) = P\big((A_A \cap A_B \cap \overline{A}_C) \cup (A_A \cap \overline{A}_B \cap A_C) \cup (\overline{A}_A \cap A_B \cap A_C)\big) =$
$= 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 + 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}436$

h) Do podniku jsou dováženy ocelové pruty ze tří závodů. Množství prutů dodávaných jednotlivými závody je v poměru 2:3:5. První závod má mezi svými pruty 2 % nekvalitních, ostatní po 1 %. Náhodně jsme vybrali jeden prut ke kontrole. Jaká je pravděpodobnost, že byl dobrý?

Řešení: H_i ... náhodně vybraný prut pochází z *i*-tého závodu

A ... náhodně vybraný prut je kvalitní

$A|H_i$ ... náhodně vybraný prut je kvalitní za předpokladu, že pochází z *i*-tého závodu

$P(H_1)=2/10=0{,}2;\ P(H_2)=3/10=0{,}3;\ P(H_3)=5/10=0{,}5$

$P(A|H_1)=0{,}98;\ P(A|H_2)=0{,}99;\ P(A|H_3)=0{,}99$

$P(A)$ vypočteme z věty o úplné pravděpodobnosti:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A|H_i)\cdot P(H_i)=0{,}98\cdot 0{,}2+0{,}99\cdot 0{,}3+0{,}99\cdot 0{,}5=0{,}988$$

g) Pravděpodobnost, že dítě bude trpět určitou alergií, je 0,7, jsou-li oba jeho rodiče alergici, 0,3, je-li jen jeden z rodičů alergik, a 0,1, jestliže žádný z rodičů alergií netrpí. Mezi rodiči dětí, které zkoumáme, je 65 % párů, kde alergií netrpí nikdo, 25 % párů, kde má alergii jeden, a 10 % párů, v nichž mají alergii oba. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybrané dítě bude mít alergii?

Řešení: H_i ... v náhodně vybraném páru rodičů je *i* alergiků ($i=0{,}1{,}2$)

A ... náhodně vybrané dítě má alergii

$A|H_i$ ... náhodně vybrané dítě má alergii za předpokladu, že mezi jeho rodiči je *i* alergiků

$P(H_0)=0{,}65;\ P(H_1)=0{,}25;\ P(H_2)=0{,}10$

$P(A|H_0)=0{,}1;\ P(A|H_1)=0{,}3;\ P(A|H_2)=0{,}7$

$P(A)$ vypočteme z věty o úplné pravděpodobnosti:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(A|H_i)\cdot P(H_i)=0{,}1\cdot 0{,}65+0{,}3\cdot 0{,}25+0{,}7\cdot 0{,}10=0{,}21$$

f) Jisté onemocnění postihuje přibližně jednoho ze 100 lidí. Pro identifikaci onemocnění existuje test, který vykazuje tyto nepřesnosti:

- výsledek testu je pozitivní u 2 % osob, které nemoc nemají,
- výsledek testu je negativní u 1 % osob, které nemoc mají.

Náhodná osoba je testována s pozitivním výsledkem. Jaká je pravděpodobnost, že onemocněním opravdu trpí?

Řešení: H_1 ... náhodně vybraná osoba má onemocnění

H_2 ... náhodně vybraná osoba nemá onemocnění

A ... náhodně vybraná osoba má pozitivní výsledek testu

$P(H_1)=1/100=0{,}01;\ P(H_2)=99/100=0{,}99$

$P(A|H_1)=0{,}99;\ P(A|H_2)=0{,}02$

$P(H_1|A)$ vypočteme užitím Bayesovy věty:

$$P(H_1|A)=\frac{P(A|H_1)\cdot P(H_1)}{\sum_{i=1}^{2}P(A|H_i)\cdot P(H_i)}=\frac{0{,}99\cdot 0{,}01}{0{,}99\cdot 0{,}01+0{,}02\cdot 0{,}99}\doteq 0{,}333$$

VÝSLEDKY

Klasická pravděpodobnost

a) $0,803$

b) $0,378$

c) $0,833$

d) $0,492$

e) 1) 0,504
   2) 0,496

f) $0,008$

Podmíněná pravděpodobnost

a) 0,273

b) 0,063

c) 1) 0,168
   2) 0,072
   3) 0,168
   4) 0,324
   5) 0,436

d) 0,318

e) 0,970

f) 0,333

g) 0,210

h) 0,988