LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 2. ŘÁDU
(S KONSTANTNÍMI KOEFICIENTY)

Lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty je rovnice ve tvaru

$$ay'' + by' + cy = f(x)\,, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}$$

Stejně jako u LDR 1. řádu pro $f(x) = 0$ se jedná o homogenní a pro $f(x) \neq 0$ o nehomogenní rovnici.
A stejně jako u LDR 1. řádu obecné řešení nehomogenní rovnice dostaneme jako součet obecného řešení příslušné homogenní rovnice a nějakého řešení rovnice nehomogenní.

Homogenní rovnice

Obecné řešení homogenní rovnice

$$ay'' + by' + cy = 0$$

určíme na základě kořenů tzv. charakteristické rovnice, což je kvadratická rovnice

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0\,.$$

Obecně, je-li λ kořen charkteristické rovnice, pak funkce $y = e^{\lambda x}$ je řešením odpovídající homogenní rovnice. Obecné řešení DR 2. řádu závisí na dvou vzájemně nezávislých konstantách $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, v případě LDR vznikne jako lineární kombinace dvou nezávislých řešení.
Všechny možnosti, které mohou nastat, ukážeme v následujícím příkladě:
Př. 7
a) dva různé reálné kořeny

$$y'' + y' - 6y = 0$$

Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 > 0\,, \quad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2}\,, \quad \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -3$$

Obecné řešení:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

b) jeden dvojnásobný reálný kořeny

$$y'' + 6y' + 9y = 0$$

Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$$

$$D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9 = 0\,, \quad \lambda_{1,2} = \frac{-6 \pm 0}{2} = -3$$

Jedno řešení tedy bude $y = e^{-3x}$, ale ještě potřebujeme druhé nezávislé řešení, kterým bude funkce $y = xe^{-3x}$ tj. obecné řešení je

$$y = c_1 e^{-3x} + c_2 x e^{-3x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

c) dva komplexně sdružené kořeny

$$y'' + 4y' + 13y = 0$$

Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = -36 < 0\,, \quad \lambda_{1,2} = \frac{-4 \pm 6\mathrm{i}}{2} = -2 \pm 3\mathrm{i}$$

Z teorie komplexních čísel je

$$e^{(-2\pm 3\mathrm{i})x} = e^{-2x}(\cos 3x + \mathrm{i} \sin 3x)$$

přičemž reálná a imaginární část této funkce jsou hledaná nezávislá řešení, tj. obecné řešení má v tomto případě tvar

$$y = c_1 e^{-2x} \cos 3x + c_2 e^{-2x} \sin 3x\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Počáteční úloha pro DR 2. řádu musí obsahovat dvě podmínky, obvykle jsou předepsány hodnoty řešení a jeho derivace v nějakém bodě.

Př. 8

$$y'' - 3y' + 2y = 0\,, \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$D = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 > 0\,, \quad \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2}\,, \quad \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2$$

Obecné řešení:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Jeho derivace:

$$y' = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x}$$

Dosadíme počáteční podmíky ($e^{0x} = e^0 = 1$)

$$\begin{array}{rcl} y(0) = 2 & : & 2 = c_1 + c_2 \\ y'(0) = 1 & : & 1 = c_1 + 2c_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} c_1 = 3 \\ c_2 = -1 \end{array}$$

a po dosazení máme řešení zadané počáteční úlohy:

$$y = 3e^x - e^{2x}$$

Poznámka: Tento postup, kdy obecné řešení určíme podle kořenů charakteristické rovnice, lze použít pro LDR libovolného řádu, pokud má konstantní koeficienty. V **Př.6** jsme řešili DR 1. řádu

$$y' + 3y = 0$$

jako rovnici separovatelnou. Jelikož jde ale také o LDR s konstantními koeficienty, můžeme si výpočet výrazně zjednodušit. Sestavíme příslušnou charakteristickou rovnici

$$\lambda + 3 = 0\,,$$

která má jediný kořen $\lambda = -3$. Obecné řešení proto musí být ve tvaru

$$y = ce^{-3x}\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

a je to :-)

Nehomogenní rovnice se speciální pravou stranou

K nalezení nějakého řešení nehomogenní LDR 2. řádu

$$ay'' + by' + cy = f(x)\,, \qquad f(x) \neq 0$$

je opět k dispozici metada variace konstant, která je však pro rovnici 2. řádu poměrně komplikovaná. Ukážeme si proto jednodušší metodu použitelnou pro některé typy pravých stran v tzv. speciálním tvaru.
Speciální pravá strana je funkce ve tvaru

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right)\,,$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $P_n(x)$, $Q_m(x)$ jsou polynomy stupně n a m. Jinak řečeno, speciální pravá strana může obsahovat polynomy, exponenciální funkce a goniometrické funkce sinus a cosinus.
Podle tvaru pravé strany $f(x)$ určíme, v jakém tvaru budeme hledat řešení y nehomogenní rovnice, přičemž se budeme držet následujících pravidel:

1. Řešení y má podobnou strukturu jako pravá strana $f(x)$.
2. Polynomy v řešení y budou kompletní a s neurčitými koeficienty (např. je-li v pravé straně polynom $x^2 + 3$, tak do řešení napíšeme $Ax^2 + Bx + C$; místo x dáme $Ax + B$ atp.).
3. Jeli v pravé straně sinus nebo cosinus, tak v řešení musí být obě dvě funkce.
4. Řešení y musí obsahovat jiné funkce než obecné řešení příslušné homogenní rovnice - pokud ne, vynásobíme x.

Předpokládané řešení bude obsahovat neznámé konstanty, které určíme dosazením tohoto řešení do původní rovnice. Vše si ukážeme na příkladech.
Př. 9

$$y'' - 6y' + 8y = 2e^{3x}$$

a) Nejprve najdeme obecné řešení příslušné homogenní rovnice

$$y'' - 6y' + 8y = 0\,.$$

Charakteristická rovnice

$$\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$$

má dva různé reálné kořeny $\lambda_1 = 2$ a $\lambda_2 = 4$, tj.

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{4x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

b) Teď se vrátíme k nehomogenní rovnici

$$y'' - 6y' + 8y = 2e^{3x}$$

a pomocí metody speciální pravé strany najdeme nějaké řešení. Pravá strana má tvar

$$f(x) = 2e^{3x}\,,$$

tj. konstanta krát e^{3x}, tak řešení budeme hledat ve stejném tvaru

$$y = Ae^{3x}\,.$$

Připomeňme si, že obecné řešení homogenní rovnice obsahovalo funkce e^{2x} a e^{4x}, což jsou jiné funkce než e^{3x} v tomto předpokládaném tvaru řešení, takže je vše v pořádku.
Abychom mohli dosadit do původní rovnice, potřebujeme ještě 1. a 2. derivaci (A je číslo):

$$y = Ae^{3x}\,, \quad y' = 3Ae^{3x}\,, \quad y'' = 9Ae^{3x}$$

Teď vezmeme rovnici

$$y'' - 6y' + 8y = 2e^{3x}$$

a dosadíme do ní za y, y' a y'':

$$9Ae^{3x} - 6 \cdot 3Ae^{3x} + 8Ae^{3}x = 2e^{3x}$$

$$-Ae^{3x} = 2e^{3x}$$

$$A = -2$$

Hledané (nějaké) řešení nehomogenní rovnice je tedy

$$y = Ae^{3x} = -2e^{3x}\,.$$

c) Obecné řešení nehomogenní rovnice dostaneme jako součet řešení získaných v předchozích krocích **a)** a **b)**

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{4x} - 2e^{3x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Př. 10

$$y'' - 6y' + 8y = 8x^2 - 12x + 18$$

a) Příslušná homogenní rovnice

$$y'' - 6y' + 8y = 0$$

je stejná jako v předchozím příkladě, takže má stejné obecné řešení

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

b) Nyní je pravá strana

$$f(x) = 8x^2 - 12x + 18\,,$$

což je kvadratický polynom, tak i řešení nehomogenní rovnice by měl být kvadratický polynom

$$y = Ax^2 + Bx + C\,.$$

Toto řešení obsahuje funkce x^2, x a 1, což jsou jiné funkce než e^{2x} a e^{4x} v **a)**, takže je vše v pořádku. Derivujeme (A, B, C jsou čísla)

$$y = Ax^2 + Bx + C\,, \quad y' = 2Ax + B\,, \quad y'' = 2A$$

a dosadíme do rovnice

$$y'' - 6y' + 8y = 8x^2 - 12x + 18\,.$$
$$2A - 6(2Ax + B) + 8(Ax^2 + Bx + C) = 8x^2 - 12x + 18$$
$$8Ax^2 + (8B - 12A)x + (8C - 6B + 2A) = 8x^2 - 12x + 18$$

Jelikož máme 3 neznámé konstanty, potřebujeme pro ně 3 rovnice, které dostaneme porovnáním koeficientů u jednotlivých funkcí x^2, x a 1:

$$\begin{array}{lclcllcl}
x^2 & : & 8A = 8 & \Rightarrow & A = 1 & & & \\
x & : & 8B - 12A = -12 & \Rightarrow & 8B - 12 \cdot 1 = -12 & \Rightarrow & B = 0 \\
1 & : & 8C - 6B + 2A = 18 & \Rightarrow & 8C - 6 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 18 & \Rightarrow & C = 2
\end{array}$$

Hledané (nějaké) řešení nehomogenní rovnice je tedy

$$y = 1x^2 + 0x + 2 = x^2 + 2\,.$$

c) Obecné řešení nehomogenní rovnice opět dostaneme jako součet řešení získaných v **a)** a **b)**

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x} + x^2 + 2\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Př. 11

$$y'' - 6y' + 8y = 6e^{2x}$$

a) Příslušná homogenní rovnice

$$y'' - 6y' + 8y = 0$$

je stejná jako v **Př. 9** a **Př. 10**, takže její obecné řešení je opět

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

b) Pravá strana je

$$f(x) = 6e^{2x}\,,$$

tj. konstanta krát e^{2x}, tak řešení bychom měli hledat ve tvaru

$$y = Ae^{2x} \, .$$

Nyní se nám tu ale vyskytuje funkce e^{2x}, která je i v obecném řešení příslušné homogenní rovnice v **a)**, tak musíme podle pravidla **4** přidat x

$$y = Axe^{2x} \, .$$

Teď už máme v řešení funkci xe^{2x}, která už se v **a)** nevyskytuje a vše je v pořádku. Derivujeme (součin)

$$y = Axe^{2x} \, , \quad y' = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} \, , \quad y'' = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$$

a dosadíme do rovnice

$$\begin{gathered} y'' - 6y' + 8y = 6e^{2x} \\ 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - 6(Ae^{2x} + 2Axe^{2x}) + 8Axe^{2x} = 6e^{2x} \\ -2Ae^{2x} = 6e^{2x} \end{gathered}$$

Vidíme, že členy s přidaným x se vzájemně odečetly. To je v pořádku, jinak bychom měli v rovnici dvě různé funkce a při porovnání koeficientů bychom dostali dvě rovnice pro jednu neznámou A.
Obecně platí, že pokud přidáme do řešení x, tak po dosazení musí tyto členy zmizet. Jinak řečeno, musíme dostat tolik rovnic, kolik máme neznámých koeficientů. **Pokud hledáme řešení ve správném tvaru, pak jsou tyto koeficienty určeny ze získaných rovnic jednoznačně.**

$$e^{2x} \;:\quad -2A = 6 \;\Rightarrow\; A = -3$$

Hledané (nějaké) řešení nehomogenní rovnice je tedy

$$y = -3xe^{2x} \, .$$

c) Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x} - 3xe^{2x} \, , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \, .$$

Př. 12

$$y'' - 2y' = 13 \sin 3x$$

a) Řešíme příslušnou homogenní rovnici

$$y'' - 2y' = 0 \, ,$$

její charaktristická rovnice

$$\lambda^2 - 2\lambda = 0$$

má dva různé reálné kořeny $\lambda_1 = 0$ a $\lambda_2 = 2$, tj.

$$y = c_1 e^{0x} + c_2 e^{2x} = c_1 + c_2 e^{2x} \, , \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \, .$$

b) Pravá strana je

$$f(x) = 13 \sin 3x \, ,$$

tj. konstanta krát $\sin 3x$, tak řešení bychom měli podle pravidla **3** hledat ve tvaru

$$y = A \sin 3x + B \cos 3x \, ,$$

kde se nám vyskytují funkce $\sin 3x$ a $\cos 3x$, které se liší od funkcí 1 a e^{2x} z **a)**, takže je vše v pořádku.
Derivujeme

$$y = A\sin 3x + B\cos 3x\,, \quad y' = 3A\cos 3x - 3B\sin 3x\,, \quad y'' = -9A\sin 3x - 9B\cos 3x\,,$$

dosadíme

$$y'' - 2y' = 13\sin 3x$$
$$-9A\sin 3x - 9B\cos 3x - 2(3A\cos 3x - 3B\sin 3x) = 13\sin 3x$$
$$(-9A + 6B)\sin 3x + (-6A - 9B)\cos 3x = 13\sin 3x$$

a porovnáme koeficienty u jednotlivých funkcí

$$\begin{aligned} \sin 3x &: \quad -9A + 6B = 13 \\ \cos 3x &: \quad -6A - 9B = 0 \end{aligned}$$

Tím jsme dostali soustavu dvou rovnic pro dva neznámé koeficienty, která má jediné řešení $A = -1$, $B = 2/3$.
Hledané (nějaké) řešení nehomogenní rovnice je tedy

$$y = -\sin 3x + \frac{2}{3}\cos 3x\,.$$

c) Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = c_1 + c_2e^{2x} - \sin 3x + \frac{2}{3}\cos 3x\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Př. 13

$$y'' - 6y' + 9y = 12e^{3x}\,, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 1$$

a) Řešíme příslušnou homogenní rovnici

$$y'' - 6y' + 9y = 0\,,$$

charaktristická rovnice

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$$

má jeden dvojnásobný reálný kořen $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, tj.

$$y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

b) Pravá strana je

$$f(x) = 12e^{3x}\,,$$

tj. konstanta krát e^{3x}, tak řešení bychom měli hledat ve tvaru

$$y = Ae^{3x}\,.$$

Nyní se nám tu ale vyskytuje funkce e^{3x}, která je i v obecném řešení příslušné homogenní rovnice v **a)**, tak musíme podle zásady **4** přidat x

$$y = Axe^{3x}\,,$$

což je ale málo, neboť i funkce xe^{3x} je v obecném řešení homogenní rovnice. Tak přidáme ještě jedno x

$$y = Ax^2e^{3x}$$

a máme funkci x^2e^{3x}, která už se v **a)** nevyskytuje a vše je v pořádku.
Derivujeme

$$y = Ax^2e^{3x}\,, \quad y' = 2Axe^{3x} + 3Ax^2e^{3x}\,,$$
$$y'' = 2Ae^{3x} + 6Axe^{3x} + 6Axe^{3x} + 9Ax^2e^{3x}$$

a dosadíme:

$$y'' - 6y' + 9y = 12e^{3x}$$
$$2Ae^{3x} + 12Axe^{3x} + 9Ax^2e^{3x} - 6(2Axe^{3x} + 3Ax^2e^{3x}) + 9Ax^2e^{3x} = 12e^{3x}$$
$$2Ae^{3x} = 12e^{3x}$$

Jak vidíme, stejně jako v **Př. 11** se všechny členy obsahující přidaná x navzájem odečetly (což musí, takže jsme spokojeni) a zůstane nám jedna rovnice pro jednu neznámou:

$$e^{3x} \; : \quad 2A = 12 \;\Rightarrow\; A = 6$$

Hledané (nějaké) řešení nehomogenní rovnice je tedy

$$y = 6x^2e^{3x}\,.$$

c) Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + 6x^2e^{3x}\,, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}\,.$$

d) Tentokrát byla zadána počáteční úloha, tak ještě musíme dosadit počáteční podmínky. Stejně jako v **Př. 8** si nejprve spočítáme derivaci obecného řešení

$$y = c_1e^{3x} + c_2xe^{3x} + 6x^2e^{3x}$$
$$y' = 3c_1e^{3x} + c_2e^{3x} + 3c_2xe^{3x} + 12xe^{3x} + 18x^2e^{3x}$$

a pak dosadíme počáteční podmínky:

$$\begin{array}{rcl} y(0) = 1 \; : & 1 = & c_1 \\ y'(0) = 1 \; : & 1 = & 3c_1 + c_2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = -2 \end{array}$$

Výsledné řešení zadané počáteční úlohy je tedy

$$y = e^{3x} - 2xe^{3x} + 6x^2e^{3x}\,.$$