LINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU

Lineární DR (LDR) 1. řádu je rovnice ve tvaru

$$a(x)y' + b(x)y = f(x)\,.$$

Je-li $f(x) = 0$, jedná se o **homogenní LDR**, pro $f(x) \neq 0$ jde o **nehomogenní LDR**.
Obecné řešení nehomogenní LDR dostaneme jako součet obecného řešení příslušné homogenní LDR (což je separovatelná DR) a nějakého řešení této nehomogenní LDR, které získáme **metodou variace konstant** - řešení hledáme ve stejném tvaru jako je nalezené řešení homogenní LDR, jen konstantu c nahradíme funkcí $c(x)$.
Př.5

$$xy' + y = x^3\,, \quad y(1) = 2$$

a) Nejprve najdeme obecné řešení příslušné homogenní rovnice (pravou stranu nahradíme nulou), což, jak již bylo řečeno, je separovatelná DR:

$$\begin{aligned} xy' + y &= 0 \\ xy' &= -y \qquad / \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} \\ \frac{1}{y}y' &= -\frac{1}{x} \qquad y \neq 0,\ x \neq 0 \end{aligned}$$

jak si snadno ověříme, funkce $y = 0$ je řešením původní (nevydělené) rovnice, které bychom ztratili. Druhé podmínky $x \neq 0$ si nebudeme všímat - ta hraje roli při určování oboru platnosti řešení, který my (pro zjednodušení učiva) neurčujeme.

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = -\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + c_1\,, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

Při vyjádření řešení v explicitním tvaru postupujeme podobně jako v **Př.4**

$$\begin{aligned} \ln|y| &= -\ln|x| + \ln\left(e^{c_1}\right)\,, \quad c_1 \in \mathbb{R} \\ \ln|y| &= \ln\left(\frac{e^{c_1}}{|x|}\right)\,, \quad c_1 \in \mathbb{R} \\ |y| &= \frac{c_2}{|x|}\,, \quad c_2 = e^{c_1} > 0 \\ y &= \frac{c_3}{x}\,, \quad c_3 \neq 0 \end{aligned}$$

To je obecné řešení rovnice po vydělení, obecné řešení rovnice před vydělením dostaneme přidáním ztraceného řešení $y = 0$, tj.

$$\begin{cases} y = \dfrac{c_3}{x}\,, \quad c_3 \neq 0 \\ y = 0 \end{cases},$$

což lze zjednodušit jako

$$y = \frac{c}{x}\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

b) Teď musíme najít nějaké řešení původní nehomogenní rovnice

$$xy' + y = x^3 \,.$$

Podle metody variace konstant hledáme toto řešení ve stejném tvaru jako má řešení získané v **a)**, jen jen konstantu c nahradíme funkcí $c(x)$, tj.

$$y = \frac{c(x)}{x} \,.$$

Neznámou funkci $c(x)$ určíme dosazením do rovnice - v té se vyskytuje i derivace y', kterou si proto spočítáme (derivace podílu)

$$y' = \frac{c'(x)x - c(x)}{x^2}$$

a vše dosadíme do $xy' + y = x^3$:

$$x\,\frac{c'(x)x - c(x)}{x^2} + \frac{c(x)}{x} = x^3$$

$$c'(x) - \frac{c(x)}{x} + \frac{c(x)}{x} = x^3$$

Členy obsahující funkci $c(x)$ se **vždy navzájem odečtou** - pokud by nezmizely, tak je v předchozím postupu něco špatně!!!

$$c'(x) = x^3$$

My ale potřebujeme funkci $c(x)$, takže budeme integrovat:

$$c(x) = \int c'(x)\,\mathrm{d}x = \int x^3\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}$$

Počítali jsme neurčitý integrál, tak bychom správně měli přidat integrační konstantu - nám ale stačí najít jedno nějaké řešení nehomogenní rovnice, tak si ji můžeme odpustit...

$$y = \frac{c(x)}{x} = y = \frac{\frac{x^4}{4}}{x} = \frac{x^3}{4}$$

c) Obecné řešení nehomogenní rovnice dostaneme jako součet řešení získaných v předchozích krocích **a)** a **b)**

$$y = \frac{c}{x} + \frac{x^3}{4} \,, \quad c \in \mathbb{R}$$

d) Na závěr už jen dosadíme počáteční podmínku

$$y(1) = 2 \,: \quad 2 = \frac{c}{1} + \frac{1^3}{4} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{7}{4}$$

a máme výsledné řešení zadané počáteční úlohy:

$$y = \frac{7}{4x} + \frac{x^3}{4}$$

Př.6

$$y' + 3y = 18x \,, \quad y(0) = 1$$

a)

$$y' + 3y = 0$$

$$\frac{1}{y}\, y' = -3 \qquad y \neq 0\,,$$

přičemž $y = 0$ je řešení rovnice před vydělením.

$$\int \frac{1}{y}\, \mathrm{d}y = -\int 3\, \mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = -3x + c_1\,, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\ln|y| = \ln\left(e^{-3x}\right) + \ln\left(e^{c_1}\right)\,, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$\ln|y| = \ln\left(e^{-3x}e^{c_1}\right)\,, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

$$|y| = c_2 e^{-3x}\,, \quad c_2 > 0$$

$$y = c_3 e^{-3x}\,, \quad c_3 \neq 0$$

Obecné řešení homogenní rovnice před vydělením dostaneme přidáním ztraceného řešení $y = 0$, tj.

$$\begin{cases} y = c_3 e^{-3x}\,, & c_3 \neq 0 \\ y = 0 & \end{cases},$$

zjednodušeně

$$y = c e^{-3x}\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

b) Řešení nehomogenní rovnice

$$y' + 3y = 18x$$

hledáme ve tvaru

$$y = c(x) e^{-3x}$$

který zderivujeme (jako součin)

$$y' = c'(x)e^{-3x} + c(x)e^{-3x}(-3)$$

a dosadíme do rovnice

$$c'(x)e^{-3x} + c(x)e^{-3x}(-3) + 3c(x)e^{-3x} = 18x$$

Členy obsahující funkci $c(x)$ se odečetly - takže je to správně :-)

$$c'(x)e^{-3x} = 18x$$

$$c'(x) = \frac{18x}{e^{-3x}} = 18xe^{3x}$$

$$c(x) = \int c'(x)\,\mathrm{d}x = \int 18xe^{3x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} u = 18x & v' = e^{3x} \\ u' = 18 & v = \frac{e^{3x}}{3} \end{array} \right| =$$

$$= 18x\,\frac{e^{3x}}{3} - \int 18\,\frac{e^{3x}}{3}\,\mathrm{d}x = 6xe^{3x} - 6\int e^{3x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= 6xe^{3x} - 6\frac{e^{3x}}{3} = 6xe^{3x} - 2e^{3x}$$

$$y = c(x)e^{-3x} = \left(6xe^{3x} - 2e^{3x}\right) e^{-3x}$$

Roznásobíme závorku, přičemž $e^{3x}e^{-3x} = e^{3x-3x} = e^0 = 1$, takže hledané řešení nehomogenní rovnice je

$$y = 6x - 2\,.$$

c) Obecné řešení nehomogenní rovnice:

$$y = ce^{-3x} + 6x - 2\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

d) Dosadíme počáteční podmínku

$$y(0) = 1\ : \quad 1 = ce^{-3\cdot 0} + 6\cdot 0 - 2 \quad \Rightarrow \quad 1 = c - 2 \quad \Rightarrow \quad c = 3$$

a máme výsledné řešení zadané počáteční úlohy:

$$y = 3e^{-3x} + 6x - 2$$