# DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE 1. ŘÁDU
## (SE SEPAROVATELNÝMI PROMĚNNÝMI)

**DR 1. řádu se separovatelnými proměnnými** neboli **separovatelná DR** je DR ve tvaru

$$f_1(y)g_1(x)\,y' = f_2(y)g_2(x)\,,$$

na obou stranách jsou součiny dvou funkcí, z nichž jedna závisí jen na $x$ a druhá jen na $y$. Vydělíme-li rovnici funkcemi $g_1(x)$ a $f_2(y)$, dostaneme separovanou DR

$$\frac{f_1(y)}{f_2(y)}\,y' = \frac{g_2(x)}{g_1(x)}\,,$$

resp.

$$\frac{f_1(y)}{f_2(y)}\,\mathrm{d}y = \frac{g_2(x)}{g_1(x)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Obě rovnice ovšem nemusí mít stejnou množinu řešení, neboť jsme provedli potencionálně neekvivalentní úpravu - přibyly nám podmínky $g_1(x) \neq 0$ a $f_2(y) \neq 0$, které v původní rovnici nebyly. **Tím jsme mohli ztratit (nebo naopak přidat) nějaké řešení !!!**
**Př.3**

$$y' = \sqrt{1-y^2}\,, \quad y(0) = \frac{1}{2}$$

Jelikož je v rovnici odmocnina, musí být splněna podmínka $1-y^2 \geq 0$ neboli $-1 \leq y \leq 1$, takže řešením bude ohraničená funkce.
Vydělíme rovnici funkcí $\sqrt{1-y^2}$ a dostaneme separovanou DR

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,y' = 1\,,$$

resp.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x\,.$$

Tady musí navíc platit $\sqrt{1-y^2} \neq 0$, tj. $-1 < y < 1$. Oproti původní rovnici jsme vyloučili funkce $y = 1$ a $y = -1$, které by mohly být řešením, což musíme zkontrolovat!
Vezmeme-li funkci $y = 1$, pak $y' = 0$ a po dosazení do původní rovnice máme

$$0 = \sqrt{1-1^2} \quad \Rightarrow \quad 0 = 0\,,$$

takže funkce $y = 1$ je řešení, které bychom v dalším postupu ztratili. Stejně si ověříme, že i funkce $y = -1$ je řešením původní rovnice. Až najdeme obecné řešení vydělené rovnice, tak k němu budeme muset obě tyto funkce přidat.
Teď se vrátíme k vydělené rovnici:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y = \int \mathrm{d}x$$

$$\arcsin y = x + c\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y = \sin(x+c)\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

což je obecné řešení vydělené rovnice.
Kompletní řešení původní rovnice dostaneme tak, že k němu přidáme obě ztracené konstantní funkce $y = 1$ a $y = -1$, tj. kompletním řešením původní rovnice je systém funkcí

$$\begin{cases} y = \sin(x + c)\,, \quad c \in \mathbb{R} \\ y = 1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Teď se vrátíme k počáteční podmínce:

$$y(0) = \frac{1}{2} \; : \quad \frac{1}{2} = \sin(0 + c) \quad \Rightarrow \quad c = \frac{\pi}{6}$$

A konečně máme výsledné řešení zadané počáteční úlohy:

$$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

Před dalším příkladem si zopakujeme některé vlastnosti přirozeného logaritmu, na které se budu při dalších výpočtech odkazovat:

1. $\ln x + \ln y = \ln(xy)$
2. $\ln x - \ln y = \ln\left(\frac{x}{y}\right)$
3. $\ln\left(x^a\right) = a \ln x$
4. $\ln\left(e^x\right) = x$

**Př.4**

$$xy' + 2y = 0\,, \quad y(1) = 3$$

$$xy' = -2y \qquad / \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{y}\, y' = \frac{-2}{x} \qquad y \neq 0\,,\; x \neq 0$$

Podmínky $x \neq 0$ si nebudeme všímat, ale podmínka $y \neq 0$ je důležitá. Snadno si ověříme, že funkce $y = 0$ je řešením původní rovnice, které bychom vydělením ztratili.

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{-2}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\ln|y| = -2\ln|x| + c_1\,, \quad c_1 \in \mathbb{R}$$

Jelikož chceme vyjádřit řešení v explicitním tvaru, musíme se nejprve zbavit logaritmů. Proto převedeme rovnici na tvar, kdy bude jeden logaritmus napravo a jeden nalevo a nic jiného.
Nejprve použijeme vlastnosti logaritmu 3. a 4.

$$\ln|y| = -\ln\left(x^2\right) + \ln\left(e^{c_1}\right)\,, \quad c_1 \in \mathbb{R}\,,$$

potom vlastnost 2.

$$\ln|y| = \ln\left(\frac{e^{c_1}}{x^2}\right)\,, \quad c_1 \in \mathbb{R}\,.$$

Teď se konečně můžeme zbavit logaritmů a označíme $c_2 = e^{c_1} > 0$

$$|y| = \frac{c_2}{x^2}\,, \quad c_2 > 0\,.$$

Nakonec se zbavíme absolutní hodnoty

$$y = \frac{c_3}{x^2}\,, \quad c_3 > 0 \vee c_3 < 0 \;\Rightarrow\; c_3 \neq 0\,.$$

Tím jsme získali obecné řešení vydělené rovnice. K němu přidáme ztracené řešení $y = 0$ a máme kompletní řešení původní rovnice:

$$\begin{cases} y = \dfrac{c_3}{x^2}\,, & c_3 \neq 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Všiměte si, že funkci $y = 0$ bychom dostali, pokud bychom v prvním řádku položili $c_3 = 0$. Kompletní řešení původní rovnice tak můžeme zjednodušeně zapsat ve tvaru

$$y = \frac{c}{x^2}\,, \quad c \in \mathbb{R}\,.$$

Teď už jen dosadíme počáteční podmínku

$$y(1) = 3\,: \quad 3 = \frac{c}{1^2} \quad \Rightarrow \quad c = 3$$

a máme výsledné řešení zadané počáteční úlohy:

$$y = \frac{3}{x^2}$$