# DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE (ÚVOD)

**Diferenciální rovnice (DR)** $k$-tého řádu je rovnice

$$f\left(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(k)}\right) = 0\,,$$

- obsahuje proměnnou $x$, funkci $y$ a její derivace,
- řád DR = řád nejvyšší derivace,
- řešením je **funkce** $y = y(x)$, která má derivace až do řádu $k$ a vyhovuje rovnici.

**Př.1** Ověřte, jsou-li je funkce $y = e^{-2x}$ a $y = 2x + 3$ řešením DR

$$y''' + 2y'' = 0\,.$$

DR je 3. řádu, tak nejprve určíme první až třetí derivaci funkce $y = e^{-2x}$:

$$y' = -2e^{-2x}\,,\quad y'' = 4e^{-2x}\,,\quad y''' = -8e^{-2x}$$

a dosadíme je do rovnice

$$-8e^{-2x} + 8e^{-2x} = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 0$$

Funkce $y = e^{-2x}$ je tedy řešením uvažované DR.
Pro druhou funkci dostaneme

$$y = 2x + 3\,,\quad y' = 2\,,\quad y'' = 0\,,\quad y''' = 0$$

po dosazení máme rovnou $0 = 0$, tj. i funkce $y = 2x + 3$ je řešením této DR.
Z předchozího vidíme, že řešením je libovolná lineární funkce. Řešení je tedy nekonečně mnoho, v tomto případě to je množina funkcí ve tvaru

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 x + c_3\,,$$

kde $c_1$, $c_2$, $c_3$ jsou libovolné reálné konstanty. Takovou množinu nazýváme **obecné řešení** DR, počet konstant je vždy roven řádu DR. Libovolná funkce z této množiny (tj. pro nějaké konkrétní hodnoty konstant) se nazývá **partikulární řešení** DR.
Pokud má být úloha jednoznačně řešitelná, musí kormě DR obsahovat ještě **podmínky** (počáteční nebo okrajové), podle kterých z nekonečně mnoha funkcí obecného řešení určíme to správné partikulární řešení.
Tj. máme-li zadanou pouze DR, pak hledáme obecné řešení. Pokud máme DR a podmínky, pak je řešením jedna konkrétní funkce.

**DR 1. řádu** je DR ve tvaru

$$f\left(x, y, y'\right) = 0\,.$$

Obecné řešení odsahuje pouze 1 volitelnou konstantu, pro jednoznačné řešení potřebujeme 1 tzv. **počáteční podmínku** $y(x_0) = y_0$ (předepíšeme hodnotu řešení v jednom bodě, neboli řešení musí procházet bodem $[x_0; y_0]$).

## DR 1. řádu se separovanými proměnnými

neboli **separovaná DR** je DR ve tvaru

$$f(y)\,y' = g(x)$$

(všechna $y$, která se v rovnici vyskytují, jsou separovaná na levé straně a všechna $x$ na pravé straně rovnice).
Pro řešení přepíšeme derivaci $y'$ pomocí Leibnitzova zápisu jako podíl diferenciálů

$$f(y)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)\,,$$

čímž jsme pokazili separaci, tak celou rovnici vynásobíme diferenciálem d$x$ a dostaneme

$$f(y)\,\mathrm{d}y = g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Teď už jen na obě strany přidáme integrační znak $\int$

$$\int f(y)\,\mathrm{d}y = \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

a další postup je jasný - obě strany zintegrujeme a takto vzniklé řešení vyjádříme (je-li to možné) v explicitním tvaru $y = \ldots$
Oba integrály jsou neurčité, takže by se na na obou stranách rovnice měla objevit integrační konstanta, z praktických důvodů ji budeme psát pouze na pravé straně u proměnné $x$ (ta levá by šla převést na druhou stranu a rozdíl dvou konstant je zase konstanta).
**Př.2**

$$3y^2y' = 2x - 1\,, \quad y(0) = 2$$

Nejprve si nevšímáme počáteční podmínky a najdeme obecné řešení DR:

$$3y^2\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x - 1 \qquad / \cdot \mathrm{d}x$$

$$\int 3y^2\,\mathrm{d}y = \int (2x-1)\,\mathrm{d}x$$

$$y^3 = x^2 - x + c\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

Jakmile se při řešení DR objeví nějaká konstanta, musíme napsat, co je zač. Zde je to integrační konstanta, tj. libovolné reálné číslo.
Teď vyjádříme $y$ a dostaneme obecné řešení:

$$y = \sqrt[3]{x^2 - x + c}\,, \quad c \in \mathbb{R}$$

Nakonec dosadíme počáteční podmínku $y(0) = 2$ (tj. za $x$ dosadíme 0 a za $y$ dosadíme 2), čímž získáme hodnotu konstanty $c$:

$$y(0) = 2\;: \quad 2 = \sqrt[3]{0^2 - 0 + c} \quad \Rightarrow \quad c = 8$$

Výsledné řešení naší počáteční úlohy je

$$y = \sqrt[3]{x^2 - x + 8}\,.$$