Aplikace integrálu – příklady

obsah rovinného obrazce, objem rotačního tělesa, délka křivky

Příklad 1. Spočítejte hodnotu určitého integrálu:

a) $\int_3^5 \sqrt{x-3}\,\mathrm{d}x$

b) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$

c) $\int_0^\pi \sin^3 x\,\mathrm{d}x$

d) $\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^x \cos x\,\mathrm{d}x$

e) $\int_0^{\pi/2} x \sin x\,\mathrm{d}x$

f) $\int_1^{\mathrm{e}} \ln x\,\mathrm{d}x$

g) $\int_0^2 \frac{2x-3}{x-3}\,\mathrm{d}x$

h) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

Příklad 2. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného:

a) křivkou $y = 9 - x^2$ a osou x

b) křivkou $y = \sin x$, osou x a přímkami $x = 0,\ x = \pi$

c) křivkou $y = \tan x$, osou x a přímkou $x = \frac{\pi}{4}$

d) křivkou $y = x^2 - 2x$, osou x a přímkami $x = 0,\ x = 3$

e) křivkou $y = -x^2 + x + 2$, osou x a přímkami $x = -2,\ x = 1$

f) křivkou $y = \cos x$, osou x a přímkami $x = -\frac{\pi}{2},\ x = \pi$

g) křivkou $y = \ln \frac{x}{2}$, osou x a přímkami $x = \frac{1}{2},\ x = 4$

h) křivkami $y = \frac{x^2}{4}$ a $y = 2\sqrt{x}$

i) křivkou danou vztahem $xy = 4$ a přímkou $x + y = 5$

j) křivkami $y = \frac{x^2}{2}$ a $y = \frac{1}{1+x^2}$

Příklad 3.

a) Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací oblasti ohraničené přímkou $f(x) = x$ a přímkami $x = 0,\ x = 3$ kolem osy x.

b) Odvoďte vzorec pro výpočet objemu kužele s poloměrem r a výškou v.

c) Vypočtěte objem tělesa vzniklého rotací oblasti ohraničené křivkou $f(x) = \tan x$ a přímkami $x = 0,\ x = \frac{\pi}{4}$ kolem osy x.

Příklad 4.

a) Vypočtěte délku křivky $y = \ln x$ na intervalu $x \in \left\langle \sqrt{3}, \sqrt{15} \right\rangle$.

b) Vypočtěte délku řetězovky $y = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ na intervalu $x \in \langle 0, 3 \rangle$.

VSB TECHNICAL UNIVERSITY OF OSTRAVA | MATH SUPPORT CENTRE
EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Výsledky

1.

a) $\frac{4}{3}\sqrt{2}$ c) $\frac{4}{3}$ e) 1 g) $4-3\ln 3$

b) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{e^{\frac{\pi}{2}}-1}{2}$ f) 1 h) $2-\frac{\pi}{2}$

2.

a) $\int\limits_{-3}^{3}(9-x^2)\,dx = 36$

b) $\int\limits_{0}^{\pi}\sin x\,dx = 2$

c) $\int\limits_{0}^{\pi/4}\tan x\,dx = \frac{\ln 2}{2}$

d) $-\int\limits_{0}^{2}(x^2-2x)\,dx + \int\limits_{2}^{3}(x^2-2x)\,dx = \frac{8}{3}$

e) $-\int\limits_{-2}^{-1}(-x^2+x+2)\,dx + \int\limits_{-1}^{1}(-x^2+x+2)\,dx = \frac{31}{6}$

f) $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos x\,dx - \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos x\,dx = 3$

g) $-\int\limits_{1/2}^{2}\ln\frac{x}{2}\,dx + \int\limits_{2}^{4}\ln\frac{x}{2}\,dx = 3\ln 2 - \frac{1}{2}$

h) $\int\limits_{0}^{4}2\sqrt{x}\,dx - \int\limits_{0}^{4}\frac{x^2}{4}\,dx = \frac{16}{3}$

i) $\int\limits_{1}^{4}(-x+5)\,dx - \int\limits_{1}^{4}\frac{4}{x}\,dx = \frac{15}{2} - 4\ln 4$

j) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}\,dx - \int\limits_{-1}^{1}\frac{x^2}{2}\,dx = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3}$

3.

a) $\pi\int\limits_{0}^{3}x^2\,dx = 9\pi$

b) $\pi\int\limits_{0}^{v}(\frac{r}{v}x)^2\,dx = \frac{1}{3}\pi r^2 v$

c) $\pi\int\limits_{0}^{\pi/4}(\tan x)^2\,dx = \frac{\pi}{4}(4-\pi)$

4.

a) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{15}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx = 2+\ln 3 - \frac{1}{2}\ln 5$

b) $\int\limits_{0}^{3}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\right)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(e^3-\frac{1}{e^3}\right)$

VSB TECHNICAL UNIVERSITY OF OSTRAVA | MATH SUPPORT CENTRE

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY