Metoda per partes

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,\mathrm{d}x$$

- Metodou per partes integrujeme např.

$$\int P(x)\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x,\ \int P(x)\cdot a^x\,\mathrm{d}x,\ \int P(x)\cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x,\ \int P(x)\cdot \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

  Polynom $P(x)$ derivujeme, tedy snížíme jeho stupeň a druhý činitel umíme snadno integrovat (**Příklady 1** a **2**). V případě potřeby postup opakujeme (**Příklad 5**).

- Metodou per partes integrujeme např.

$$\int P(x)\cdot \arcsin x\,\mathrm{d}x,\ \int P(x)\cdot \arctan x\,\mathrm{d}x,\ \int P(x)\cdot \log_a x\,\mathrm{d}x.$$

  Polynom $P(x)$ integrujeme a druhý činitel derivujeme, neboť ho integrovat neumíme (**Příklady 3** a **4**).

- Po integraci per partes a úpravách se znovu objeví výchozí integrál a dostáváme rovnici. Převedením integrálů na jednu stranu dostaneme výsledek (**Příklad 6**). Někdy provádíme per partes vícekrát (**Příklad 7**).

Příklad 1

$$\int x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u=x & v'=\cos x \\ u'=1 & v=\sin x \end{vmatrix} = x\cdot\sin x - \int 1\cdot\sin x\,\mathrm{d}x = x\cdot\sin x + \cos x + c$$

Příklad 2

$$\int x\cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u=x & v'=\mathrm{e}^x \\ u'=1 & v=\mathrm{e}^x \end{vmatrix} = x\cdot\mathrm{e}^x - \int 1\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x\cdot\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c$$

Příklad 3

$$\int 1\cdot\ln x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u=\ln x & v'=1 \\ u'=\dfrac{1}{x} & v=x \end{vmatrix} = (\ln x)\cdot x - \int \frac{1}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x = x\cdot\ln x - \int 1\,\mathrm{d}x = x\cdot\ln x - x + c$$

Příklad 4

$$\int x\cdot\arctan x\,\mathrm{d}x = \begin{vmatrix} u=\arctan x & v'=x \\ u'=\dfrac{1}{1+x^2} & v=\dfrac{x^2}{2} \end{vmatrix} = \arctan x\cdot\frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}(x-\arctan x) + c$$

VSB TECHNICAL UNIVERSITY OF OSTRAVA | MATH SUPPORT CENTRE
EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Příklad 5

$$\int x^2 \cdot e^{3x}\,dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & v' = e^{3x} \\ u' = 2x & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix} = x^2 \cdot \tfrac{1}{3}e^{3x} - \int 2x \cdot \tfrac{1}{3}e^{3x}\,dx =$$

$$= x^2 \cdot \tfrac{1}{3}e^{3x} - \tfrac{2}{3}\int x \cdot e^{3x}\,dx = \begin{vmatrix} u = x & v' = e^{3x} \\ u' = 1 & v = \frac{1}{3}e^{3x} \end{vmatrix} =$$

$$= \tfrac{1}{3}x^2 \cdot e^{3x} - \tfrac{2}{3}\left(x \cdot \tfrac{1}{3}e^{3x} - \int 1 \cdot \tfrac{1}{3}e^{3x}\,dx\right) = \tfrac{1}{3}x^2e^{3x} - \tfrac{2}{9}xe^{3x} + \tfrac{2}{9}\int e^{3x}\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{3}x^2e^{3x} - \tfrac{2}{9}xe^{3x} + \tfrac{2}{27}e^{3x} + c = \tfrac{1}{3}e^{3x}\left(x^2 - \tfrac{2}{3}x + \tfrac{2}{9}\right) + c$$

Příklad 6

$$\int \sin x \cdot \cos x\,dx = \begin{vmatrix} u = \sin x & v' = \cos x \\ u' = \cos x & v = \sin x \end{vmatrix} = \sin x \cdot \sin x - \int \cos x \cdot \sin x\,dx$$

dostali jsme opět stejný integrál, a ten převedeme na levou stranu

$$\begin{aligned} \int \sin x \cdot \cos x\,dx &= \sin^2 x - \int \sin x \cdot \cos x\,dx \\ 2\int \sin x \cdot \cos x\,dx &= \sin^2 x + c \\ \int \sin x \cdot \cos x\,dx &= \frac{1}{2}\sin^2 x + c \end{aligned}$$

Příklad 7

$$\int e^{-x} \cdot \cos x\,dx = \begin{vmatrix} u = e^{-x} & v' = \cos x \\ u' = -e^{-x} & v = \sin x \end{vmatrix} = e^{-x} \cdot \sin x - \int -e^{-x} \cdot \sin x\,dx =$$

$$= e^{-x} \cdot \sin x + \int e^{-x} \cdot \sin x\,dx = \begin{vmatrix} u = e^{-x} & v' = \sin x \\ u' = -e^{-x} & v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= e^{-x} \cdot \sin x + e^{-x} \cdot (-\cos x) - \int -e^{-x} \cdot (-\cos x)\,dx$$

dostali jsme opět stejný integrál, a ten převedeme na levou stranu

$$\begin{aligned} \int e^{-x} \cdot \cos x\,dx &= e^{-x} \cdot \sin x - e^{-x} \cdot \cos x - \int e^{-x} \cdot \cos x\,dx \\ 2\int e^{-x} \cdot \cos x\,dx &= e^{-x} \cdot \sin x - e^{-x} \cdot \cos x + c \\ \int e^{-x} \cdot \cos x\,dx &= \frac{1}{2}e^{-x}(\sin x - \cos x) + c \end{aligned}$$

VSB TECHNICAL UNIVERSITY OF OSTRAVA | MATH SUPPORT CENTRE

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY