DIFERENCIÁLNÍ POČET FUNKCE DVOU PROMĚNNÝCH – PŘÍKLADY

parciální derivace, tečná rovina, lokální extrémy

Příklad 1. Vypočtěte parciální derivace prvního řádu funkce dvou proměnných:

a) $f(x,y) = \mathrm{e}^{2y}\cos x$

b) $f(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}$

c) $f(x,y) = x\sin^2 xy$

d) $f(x,y) = \ln(x - y\cdot \mathrm{e}^x)$

e) $f(x,y) = y\arcsin\sqrt{xy} + \sin^2 y$

f) $f(x,y) = 4\sqrt[3]{x^5} - \ln y^2$

Příklad 2. Vypočtěte parciální derivace druhého řádu funkce dvou proměnných:

a) $f(x,y) = \dfrac{\cos^2 y}{x}$

b) $f(x,y) = y^{x+1}$

c) $f(x,y) = y\tan x^2$

d) $f(x,y) = \arctan\dfrac{y}{x}$

Příklad 3. Určete rovnici tečné roviny a normály funkce f v dotykovém bodě T:

a) $f(x,y) = 2x + \sqrt{y^2 - x^2}$, $T = [0,1,z_0]$

b) $f(x,y) = x\ln xy$, $T = [1,1,z_0]$

c) $f(x,y) = \sqrt{x^2+xy+1}$, $T = [0,4,z_0]$

d) $f(x,y) = x\cdot \mathrm{e}^{y^2-x}$, $T = [4,2,z_0]$

e) $f(x,y) = x^3 - 6xy + 3y^2$, $T = [1,2,z_0]$

f) $f(x,y) = y^x + y$, $T = [1,\mathrm{e},z_0]$

Příklad 4. Nalezněte lokální extrémy funkcí:

a) $f(x,y) = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$

b) $f(x,y) = x^2 - 2x\sqrt{y} + 2y^2$

c) $f(x,y) = (x+y^2)\mathrm{e}^{x/2}$

d) $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$

e) $f(x,y) = y + \dfrac{1}{y} - 2\ln^2 x$

f) $f(x,y) = 3(x^2+y^2)^2$

VSB TECHNICAL UNIVERSITY OF OSTRAVA | MATH SUPPORT CENTRE

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Výsledky

1.

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\mathrm{e}^{2y} \sin x$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2\mathrm{e}^{2y} \cos x$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{x^2 + y^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \sin^2 xy + xy \sin 2xy$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = x^2 \sin 2xy$

d) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1 - y\mathrm{e}^x}{x - y\mathrm{e}^x}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{\mathrm{e}^x}{x - y\mathrm{e}^x}$

e) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{y^3}{x(1-xy)}}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = \arcsin \sqrt{xy} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{xy}{1-xy}} + \sin 2y$

f) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{20}{3}\sqrt[3]{x^2}$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = -\dfrac{2}{y}$

2.

a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{2\cos^2 y}{x^3}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{-2\cos 2y}{x}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\sin 2y}{x^2}$

b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^{x+1} \ln^2 y$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x(x+1)y^{x-1}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = y^x(1 + (x+1)\ln y)$

c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y\dfrac{\cos x^2 + 4x^2 \sin x^2}{\cos^3 x^2}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{2x}{\cos^2 x^2}$

d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$

3.

a) $\tau : 2x + y - z = 0$

$n : x = 2t,\ y = 1 + t,\ z = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R}$

b) $\tau : x + y - z - 2 = 0$

$n : x = 1 + t,\ y = 1 + t,\ z = -t, \quad t \in \mathbb{R}$

c) $\tau : 2x - z + 1 = 0$

$n : x = 2t,\ y = 4,\ z = 1 - t, \quad t \in \mathbb{R}$

d) $\tau : -3x + 16y - z - 16 = 0$

$n : x = 4 - 3t,\ y = 2 + 16t,\ z = 4 - t, \quad t \in \mathbb{R}$

e) $\tau : 9x - 6y + z + 2 = 0$

$n : x = 1 + 9t,\ y = 2 - 6t,\ z = 1 + t, \quad t \in \mathbb{R}$

f) $\tau : \mathrm{e}x + 2y - z - \mathrm{e} = 0$

$n : x = 1 + \mathrm{e}t,\ y = \mathrm{e} + 2t,\ z = 2\mathrm{e} - t, \quad t \in \mathbb{R}$

4.

a) minimum v $[0, 0]$

b) minimum v $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$

c) minimum v $[-2, 0]$

d) minimum v $[1, 1]$

e) maximum v $[1, -1]$

f) minimum v $[0, 0]$