Složená funkce a její derivace

Co je to složená funkce

Funkce f je **složena** z funkcí h a g, když:

$$\text{pro každé } x \in D_f \quad \text{platí} \quad f(x) = h(g(x)),$$

kde $D_f = \{x \in D_g, g(x) \in D_h\}$. Značíme symbolem $f = h \circ g$.

$$\begin{array}{lll}
h: y = \sqrt{x} & g: y = x+2 & h(g(x)) = \sqrt{x+2} \\
h: y = 1+\sin x & g: y = x^2-5 & h(g(x)) = 1+\sin(x^2-5) \\
h: y = x^2-3x & g: y = \sin(x) & h(g(x)) = (\sin(x))^2 - 3\cdot\sin(x)
\end{array}$$

Funkci g nazýváme **vnitřní** a h **vnější** funkcí.

Skládání funkcí není komutativní $h \circ g \neq g \circ h$.

$$\begin{array}{lll}
h: y = x^2-1 & g: y = \dfrac{1}{x} & h(g(x)) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2 - 1 \\
h: y = \dfrac{1}{x} & g: y = x^2-1 & h(g(x)) = \dfrac{1}{x^2-1}
\end{array}$$

Derivace složené funkce

Pro derivaci složené funkce $h\,(g(x))$ platí:

$$y' = h'(g(x)) \cdot g'(x)\,.$$

Derivace složené funkce je rovna součinu derivace vnější funkce (s původním argumentem) a derivace vnitřní funkce.

$$\begin{array}{ll}
y = (x^2-4)^3 & y' = 3\,(x^2-4)^2 \cdot (x^2-4)' = 3(x^2-4)^2 \cdot 2x = 6x(x^2-4)^2 \\
y = \sin 3x & y' = \cos 3x \cdot (3x)' = \cos 3x \cdot 3 = 3\cos 3x \\
y = \ln(4x+1) & y' = \dfrac{1}{4x+1} \cdot (4x+1)' = \dfrac{1}{4x+1} \cdot 4 = \dfrac{4}{4x+1} \\
y = \sin x^2 & y' = \cos x^2 \cdot (x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x\cos x^2 \\
y = \sin^4 x = (\sin x)^4 & y' = 4\,(\sin x)^3 \cdot (\sin x)' = 4\sin^3 x \cdot \cos x \\
y = \arctan(x-3) & y' = \dfrac{1}{1+(x-3)^2} \cdot (x-3)' = \dfrac{1}{1+(x-3)^2} \cdot 1 = \dfrac{1}{x^2-6x+10} \\
y = \sqrt{\sin 3x} = (\sin 3x)^{\frac{1}{2}} & y' = \dfrac{1}{2}(\sin 3x)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (\sin 3x)' = \dfrac{1}{2}(\sin 3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos 3x \cdot (3x)' = \\
& \quad = \dfrac{1}{2}(\sin 3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos 3x \cdot 3 = \dfrac{3\cos 3x}{2\sqrt{\sin 3x}}
\end{array}$$

VSB TECHNICAL UNIVERSITY OF OSTRAVA | MATH SUPPORT CENTRE

EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY