Tečna ke grafu funkce

Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 konečnou derivaci $f(x_0)$, je možné v tomto bodě sestrojit k jejímu grafu tečnu, která má rovnici

$$t: \quad y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Příklad: Určete rovnici tečny $y = t(x)$ ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0:

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 5, \quad x_0 = 2.$$

Řešení: Určíme nejdříve funkční hodnotu $f(c)$, pak funkci $f(x)$ derivujeme a poté určíme její hodnotu v bodě c:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= 2^4 - 3 \cdot 2^3 + 5 = -3 \\ f'(x) &= 4x^3 - 9x^2, \\ f'(x_0) &= 4 \cdot 2^3 - 9 \cdot 2^2 = -4. \end{aligned}$$

Dosadíme do vzorce pro rovnici tečny:

$$t: \quad y = -3 - 4(x - 2) = -4x + 5.$$

Úloha 1. Určete rovnici tečny $y = t(x)$ ke grafu funkce $y = f(x)$ v bodě x_0:

a) $f(x) = \left(x^2 + 4x + 1\right) \mathrm{e}^x, \quad x_0 = 0,$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 4}, \quad x_0 = -2,$

c) $f(x) = \ln\left(3x^2 - 8x + 5\right), \quad x_0 = 2,$

d) $f(x) = \sqrt[3]{7 + \sin x}, \quad x_0 = \frac{\pi}{2},$

e) $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x, \quad x_0 = 0,$

f) $f(x) = \sqrt{x} + \ln(x - 3), \quad x_0 = 4,$

g) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x - 2}, \quad x_0 = 3,$

h) $f(x) = \dfrac{1}{x^5} + \dfrac{1}{x^7}, \quad x_0 = -1,$

i) $f(x) = x\mathrm{e}^{x^3 - 1}, \quad x_0 = 1,$

j) $f(x) = -x + 12\sqrt[3]{x} - 11, \quad x_0 = 8.$

[

a) $y = 5x + 1,$

b) $y = -\frac{1}{4},$

c) $y = 4x - 8,$

d) $y = 2,$

e) $y = x + 1,$

f) $y = \frac{5}{4}x - 3,$

g) $y = -x + 5,$

h) $y = -12x - 14,$

i) $y = 4x - 3,$

j) $y = 5.$

]

Aproximace číselných výrazů

Má-li funkce $f(x)$ v bodě x_0 konečnou derivaci $f(x_0)$, je možné hodnoty funkce $f(x)$ odhadnout pro dostatečně malé h přislušnými hodnotami na tečně v bodě x_0.

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot h.$$

Příklad: Odhadněte pomocí tečny ke grafu vhodné funkce ve vhodném bodě hodnotu číselného výrazu:

$$\sqrt{9{,}012}.$$

Řešení: Volíme

- $x_0 + h$ jako skutečnou hodnotu ze zadání,
- $f(x)$, aby přesně odpovídala výrazu ze zadání, který chceme aproximovat,
- x_0 jako vhodně zvolenou blízkou hodnotu, její odhad, pro který lze hodnotu $f(x_0)$ snadno spočítat,

tj.

$$x_0 + h = 9{,}012, \quad f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 9.$$

Dopočítáme přírůstek h, derivaci $f'(x)$, její hodnotu $f'(x_0)$:

$$h = 0{,}012, \qquad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \qquad f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$$

a číselný výraz odhadneme:

$$\sqrt{9{,}012} = \sqrt{9} + \frac{1}{6} \cdot 0{,}012 = 3 + 0{,}002 = 3{,}002.$$

Úloha 2. Odhadněte pomocí tečny ke grafu vhodné funkce ve vhodném bodě hodnotu číselného výrazu:

a) $\sqrt{15{,}912}$,
b) $\sqrt[3]{7{,}928}$,
c) $\sqrt[4]{1{,}096}$,
d) $3{,}017^2$,
e) $1{,}989^3$,
f) $2{,}005^4$,
g) $\frac{4}{1{,}985}$,
h) $\frac{8}{2{,}007^2}$,
i) $\frac{3}{0{,}989^3}$.

a) 3,989,
b) 1,994,
c) 1,024,
d) 9,102,
e) 7,868,
f) 16,16,
g) 2,015,
h) 1,986,
i) 3,099.

Úloha 3. Odhadněte pomocí tečny ke grafu vhodné funkce ve vhodném bodě hodnotu číselného výrazu:

a) $\ln(1{,}017)$,

b) $\ln(\sqrt{9{,}088}-2)$,

c) $\mathrm{e}^{-0{,}048}$,

d) $\frac{2}{\mathrm{e}^{0{,}106}+3}$.

[a) 0,017, b) 0,015, c) 0,952, d) 0,487.