



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Sada vzorových příkladů z matematiky a deskriptivní geometrie

KMDG, VŠB - Technická Univerzita Ostrava

2019

Opakovací lekce z Matematiky II - verze 1a

Neurčitý integrál - výpočet přímou metodou

$$\int \frac{x^4 + 4}{x^2 + 1} dx \quad \int e^x \left(2 + \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \right) dx \quad \int \sqrt{\frac{2}{x}} - \frac{5 \sin^2 x + 3 \cos^2 x}{2 \sin^2 x \cos^2 x} dx \quad \int x \ln 2 dx$$

Řešené příklady na str. 66-69

Neřešené příklady na str. 153-158

Určitý integrál - obsah rovinného útvaru ohraničeného jednou křivkou

Vypočítejte obsah rovinné plochy (načrtněte) ohraničené křivkami

a) $y = \ln x, y = 0, x = 5, x = 7.$

b) $yx = 1, y = 0, x = 1, x = 3.$

Řešené i neřešené příklady na str. 27-29

Funkce dvou proměnných - definiční obor

Pro danou funkci určete a graficky znázorněte definiční obor.

a) $f(x, y) = \arccos \ln 3x - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3y}}$

b) $f(x, y) = \ln(x \ln(y - x))$

Řešené příklady na str. 107, 108

Neřešené příklady na str. 204-213

Obyčejné diferenciální rovnice - separovatelná typu $y' = f(x) \cdot g(y)$

Nalezněte obecné řešení rovnice:

a) $(1 + x)y' - 2y = 0$

b) $(x - 1)y^3 - e^x y' = 0$

Řešené i neřešené příklady na str. 7-11



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Kontrolní otázky z Matematiky II - verze 1a

Neurčitý integrál

- Definujte pojem primitivní funkce.
- Kolik primitivních funkcí existuje k funkci $y = \sin(2x)$? Uveďte 3 z nich.
- Napište vztah pro integraci součtu 2 funkcí a integraci součinu funkce s konstantou.

[Teorie na str. 11-13](#)

Určitý integrál

- Formulujte větu, pomocí které se provádí výpočet určitého integrálu?
- Jaká je hodnota integrálu v případě, že dolní a horní mez je stejná? Výsledek zdůvodněte.
- Jak lze pomocí určitého integrálu určit obsah rovinného útvaru ohraničeného jednou křivkou, osou x v daných mezích?

[Teorie na str. 24,25,27](#)

Funkce dvou proměnných

- Jak vytvoříme vrstevnicový graf?
- Definujte pojem definiční obor funkce dvou reálných proměnných.
- Co je grafem funkce dvou reálných proměnných?

[Teorie na str. 33-35](#)

Obyčejné diferenciální rovnice

- Co je řešením obyčejné diferenciální rovnice?
- Definujte pojem separovaná diferenciální rovnice.
- Čím je určen řád diferenciální rovnice?

[Teorie na str. 49-51](#)



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

**MS
MŠMT**
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Opakovací lekce z Matematiky II - verze 1b

Neurčitý integrál - výpočet přímou metodou

$$\int \frac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x} dx \quad \int \frac{x^2 + 3x + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx \quad \int \frac{1}{(2x - 1)^2} dx \quad \int \frac{1}{x^2 + 4x + 5} dx$$

Řešené příklady na str. 66-69

Neřešené příklady na str. 153-158

Určitý integrál - obsah rovinného útvaru ohraničeného jednou křivkou

Vypočítejte obsah rovinné plochy (načrtněte) ohraničené křivkami

a) $y = 2^x - 2, y = 0, x = -1, x = 1.$

b) $y = \sqrt{2x - 1} - 1, y = 0, x = \frac{1}{2}, x = 5.$

Řešené i neřešené příklady na str. 27-29

Funkce dvou proměnných - definiční obor

Pro danou funkci určete a graficky znázorněte definiční obor.

a) $f(x, y) = \frac{x+1}{\ln(y)} + \arcsin(x - 1)$

b) $f(x, y) = \sqrt{x - y} + \ln(4 - x^2 - y^2)$

Řešené příklady na str. 107, 108

Neřešené příklady na str. 204-213

Obyčejné diferenciální rovnice - separovatelná typu $y' = f(x) \cdot g(y)$

Nalezněte obecné řešení rovnice:

a) $2y'\sqrt{x} - y = 0$

b) $y' = (2y + 1) \cot x$

Řešené i neřešené příklady na str. 7-11



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Kontrolní otázky z Matematiky II - verze 1b

Neurčitý integrál

- Definujte pojem neurčitý integrál.
- Je funkce $y = 2 \arcsin x - 3$ primitivní funkcí k funkci $y = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$? Své tvrzení zdůvodněte.
- Co je primitivní funkcí k funkci $f(x) = ax + b$?

[Teorie na str. 11-13](#)

Určitý integrál

- Jaký je geometrický význam určitého integrálu?
- Můžeme u určitého integrálu zaměnit horní a dolní mez?
- Kdy platí rovnost $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$?

[Teorie na str. 24,25,27](#)

Funkce dvou proměnných

- Které parciální derivace nazýváme smíšené a co pro ně platí, v případě, že jsou v daném bodě spojité?
- Definujte pojem obor hodnot funkce dvou reálných proměnných.
- Může být kulová plocha grafem funkce dvou reálných proměnných? Své tvrzení zdůvodněte.

[Teorie na str. 33-35](#)

Obyčejné diferenciální rovnice

- Definujte pojem obyčejná diferenciální rovnice n -tého řádu.
- Vysvětlete pojem partikulární řešení diferenciální rovnice.
- Co je grafickým řešením diferenciální rovnice?

[Teorie na str. 49-50](#)



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Opakovací lekce z Matematiky II - verze 2a

Neurčitý integrál - metoda per partes

$$\int \frac{\sin \frac{x}{2}}{e^{-x}} dx \quad \int \frac{\ln^3 x}{x^2} dx \quad \int 4x \arctan 2x dx \quad \int x \cos x dx$$

Řešené příklady na str. 70-71

Neřešené příklady na str. 159-161

Určitý integrál - obsah rovinného útvaru mezi dvěma křivkami

Vypočítejte obsah rovinné plochy (načrtněte) ohraničené křivkami

a) $y = -x^2 + 4x - 2, y + x = 2.$

b) $y^2 = 2x + 1, x - y - 1 = 0.$

Řešené i neřešené příklady na str. 29-30

Funkce dvou proměnných - totální diferenciál funkce

a) Určete totální diferenciál funkce $f(x, y) = y \tan \left(x + \frac{x}{y} \right).$

b) Srovnejte totální diferenciál a totální přírůstek funkce $f(x, y) = x^2 + xy$ v bodě $A = [1, 2]$, jsou-li dány přírůstky $h_1 = 0.1$ a $h_2 = 0.2$.

Řešené příklady na str. 111-115

Neřešené příklady na str. 222-224

Obyčejné diferenciální rovnice - homogenní DR: $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Nalezněte obecné (partikulární) řešení rovnice:

a) $(xy - x^2)y' = y^2, y(1) = 1$

b) $(x^2 - y^2)y' = 2xy$

Řešené i neřešené příklady na str. 14-18



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Kontrolní otázky z Matematiky II - verze 2a

Neurčitý integrál

- Popište princip metody per partes?
- Uveďte základní typy integrandů, které řešíme metodou per partes.
- Popište řešení neurčitých integrálů metodou per partes vedoucí na rovnici.

[Teorie na str. 14-15](#)

Určitý integrál

- Jaké vlastnosti lze využít při výpočtu určitého integrálu sudé funkce?
- Jak se liší výpočet určitého integrálu metodou per partes od použití této metody v neurčitém integrálu.
- Jak lze pomocí určitého integrálu určit obsah rovinného útvaru ohraničeného dvěma křivkami $y = f(x)$, $y = g(x)$, pokud $f(x) \leq g(x)$ na $\langle a, b \rangle$?

[Teorie na str. 24-28](#)

Funkce dvou proměnných

- Co je výsledkem parciální derivace funkce dvou reálných proměnných?
- Formulujte Schwarzovu větu.
- Definujte pojem: funkce dvou reálných proměnných.

[Teorie na str. 37-40](#)

Obyčejné diferenciální rovnice

- Definujte pojem: obyčejná diferenciální rovnice 1.řádu.
- Popište postup řešení homogenní diferenciální rovnice.
- Co je řešením Cauchyovy úlohy?

[Teorie na str. 49,50,52](#)



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání


MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Opakovací lekce z Matematiky II - verze 2b

Neurčitý integrál - výpočet metodou per partes

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad \int \frac{x^2}{e^{2x}} dx \quad \int x \tan^2 x dx \quad \int \ln \frac{x}{2} dx$$

Řešené příklady na str. 70-71

Neřešené příklady na str. 159-160

Určitý integrál - obsah rovinného útvaru ohraničeného dvěma křivkami

Vypočítejte obsah rovinné plochy (načrtněte) ohraničené dvěma funkcemi

a) $f : xy = 4, g : x + y = 5$

b) $f : y = e^{x-1}, g : y = e^{1-x}, x = 2$

Řešené i neřešené příklady na str. 29-30

Funkce dvou proměnných - totální diferenciál

Určete hodnotu totálního diferenciálu funkce $f(x, y)$ v bodě T .

a) $f(x, y) = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}, T[1, 2, ?]$

b) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}, T[1, 1, ?]$

Řešené příklady na str. 111-116

Neřešené příklady na str. 217-227

Obyčejné diferenciální rovnice - homogenní typu $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

Nalezněte obecné řešení rovnice:

a) $x^2 + y^2 = 2xyy'$

b) $xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x$

Řešené i neřešené příklady na str. 14-18



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Kontrolní otázky z Matematiky II - verze 2b

Neurčitý integrál

- Kdy použijeme při výpočtu integrálu metodu per partes?
- Je funkce $y = x \ln x - x$ primitivní funkcí k funkci $y = \ln x$? Své tvrzení zdůvodněte.
- Odvoďte vztah pro integraci metodou per partes.

[Teorie na str. 11-15](#)

Určitý integrál

- Jaký je rozdíl mezi výsledkem určitého a neurčitého integrálu?
- Jaká je hodnota určitého integrálu $\int_{-a}^a f(x) dx$, je-li funkce $f(x)$ lichá?
- Jak lze pomocí určitého integrálu určit obsah rovinného útvaru ohraničeného dvěma křivkami?

[Teorie na str. 24,25,28](#)

Funkce dvou proměnných

- Definuj totální diferenciál funkce $z = f(x, y)$.
- K čemu je možné využít totální diferenciál funkce?
- Definuj funkci dvou proměnných.

[Teorie na str. 37-41](#)

Obyčejné diferenciální rovnice

- Jaké typy řešení diferenciální rovnice rozlišujeme?
- Vysvětlete pojem obecné řešení diferenciální rovnice.
- Jakým způsobem převedeme homogenní diferenciální rovnici na rovnici se separovanými proměnnými?

[Teorie na str. 49-52](#)



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

**MS
MT**
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Opakovací lekce z Matematiky II - verze 3a

Neurčitý integrál - integrace racionální lomené funkce

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 4}{x + 2} dx \quad \int \frac{x - 1}{(x + 1)(x^2 + 4x + 4)} dx \quad \int \frac{x^3}{(x^4 + 3)^3} dx \quad \int \frac{3x + 4}{x^2 + 2x + 2} dx$$

[Řešené příklady na str. 75-78](#)

[Neřešené příklady na str. 167-172](#)

Určitý integrál - objem rotačního tělesa

Vypočítejte objem tělesa, vzniklého rotací funkce kolem osy x

a) $y = e^x + 1$ pro $x \in \langle 0, 1 \rangle$.

b) $2 = xy$ pro $x \in \langle 1, 4 \rangle$.

[Řešený příklad na str. 101](#)

[Neřešené příklady na str. 196,197](#)

Funkce dvou proměnných - tečná rovina

Nalezněte tečnou rovinu a normálu ke grafu funkce

a) $f(x, y) = (2x^2 - y)^2 + 4xy$ v bodě $T = [3, 5, ?]$.

b) $x + y + z = e^{-(x+y)+1}$ v bodě $T = [1, 0, ?]$.

[Řešený příklad na str. 116](#)

[Neřešené příklady na str. 226,227](#)

Obyčejné diferenciální rovnice - lineární DR: $a(x)y' + b(x)y = c(x)$

Nalezněte obecné (partikulární) řešení rovnice:

a) $y' + 2y = 4x$.

b) $(1 - x)(y' + y) = e^{-x}$.

[Řešené i neřešené příklady na str. 21-25](#)



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Kontrolní otázky z Matematiky II - verze 3a

Neurčitý integrál

- Uveďte rozklad na parciální zlomky pro reálné různé kořeny jmenovatele racionální funkce.
- Jaký integrál dostaneme při integraci parciálního zlomku $\frac{A}{x-\alpha}$?
- Jak můžeme nalézt koeficienty rozkladu na parciální zlomky?

Teorie na str. 19,20

Určitý integrál

- Platí obecně tato rovnost: $\int_a^b |f(x)| dx = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$?
- Čím se při výpočtu liší substituční metoda pro určitý integrál od substituční metody pro integrál neurčitý?
- Uveďte větu vyjadřující vztah mezi primitivní funkcí a Riemannovým integrálem.

Teorie na str. 24-26,30

Funkce dvou proměnných

- Co lze tvrdit o funkci dvou reálných proměnných, je-li tato funkce v bodě A diferencovatelná?
- Jaký je vztah mezi diferenciálem a tečnou rovinou?
- Kolik existuje třetích parciálních derivací k funkci $z = f(x, y)$? Uveďte je.

Teorie na str. 37-41

Obyčejné diferenciální rovnice

- Definujte pojem: lineární diferenciální rovnice 1.řádu.
- Jaká metoda se využívá k řešení lineárních diferenciálních rovnic 1. řádu?
- Jak řešíme zkrácenou LDR 1. řádu?

Teorie na str. 55-57



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Opakovací lekce z Matematiky II - verze 3b

Neurčitý integrál - integrace racionální lomené funkce

$$\int \frac{x-1}{x^2-1} dx \quad \int \frac{x^5+2x^3-4x+2}{x^3-x^2} dx \quad \int \frac{3x-1}{x^2+4x+5} dx \quad \int \frac{9x-5}{9x^2-6x+1} dx$$

Řešené příklady na str. 75-78

Neřešené příklady na str. 167-172

Určitý integrál - objem rotačního tělesa

Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací funkce $f(x)$ kolem osy x

a) $f : y = \sin \frac{x}{2}$ pro $x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$

b) $f : y = \sqrt{2x-1}$ pro $x \in \langle 1, 2 \rangle$.

Řešené i neřešené příklady na str. 32-35

Funkce dvou proměnných - tečná rovina a normála

Určete rovnici tečné roviny a normály ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě T .

a) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$, $T[1, 1, ?]$

b) $f(x, y) = y \ln 3x - y$, $T[1, 2, ?]$.

Řešené příklady na str. 111-116

Neřešené příklady na str. 217-227

Obyčejné diferenciální rovnice - lineární DR: $a(x)y' + b(x)y = c(x)$

Řešte Cauchyho úlohu:

a) $2xy' - 6y = x^2$, $y(1) = 2$

b) $x^2y' + xy = \ln x$, $y(1) = \frac{1}{2}$.

Řešené i neřešené příklady na str. 19-25



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Kontrolní otázky z Matematiky II - verze 3b

Neurčitý integrál

- Vysvětlete pojem ryze a neryze lomená racionální funkce.
- Uveďte rozklad na parciální zlomky pro dvojnásobný reálný kořen jmenovatele racionální funkce.
- Uveďte postup, kterým řešíme integraci racionální lomené funkce.

[Teorie na str. 19-20](#)

Určitý integrál

- Uveďte vztah pro výpočet objemu tělesa, jehož plášť vznikne rotací křivky $f(x)$ kolem osy y .
- Jaké těleso vznikne rotací křivky $y = \sqrt{x}$ kolem osy x , přičemž $0 \leq x \leq 1$?
- Jak se liší výpočet určitého integrálu metodou per partes od použití této metody v neurčitém integrálu?

[Teorie na str. 24-26,30](#)

Funkce dvou proměnných

- Je hodnota parciální derivace funkce $f(x, y) = ye^{-x^2}$ podle x v bodě $T[-1, 1]$ rovna $-e$?
- Jaký je geometrický význam parciální derivace?
- Napište rovnici tečné roviny a normály plochy $f(x, y)$ v bodě $T[x_0, y_0]$.

[Teorie na str. 37-41](#)

Obyčejné diferenciální rovnice

- Jaké typy řešení diferenciální rovnice rozlišujeme?
- Vysvětlete pojem partikulární řešení diferenciální rovnice.
- Jaký je obecný tvar lineární diferenciální rovnice 1. řádu?

[Teorie na str. 55-57](#)



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Opakovací lekce z Matematiky II - verze 4a

Neurčitý integrál - integrace substitucí

$$\int x\sqrt{x^2+4} dx \quad \int \frac{(1+\ln x)^3}{x} dx \quad \int \frac{1}{x^2} e^{1/x} dx \quad \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx$$

[Řešené příklady na str. 72-73](#)

[Neřešené příklady na str. 162-164](#)

Určitý integrál - obsah rovinného útvaru ohraničeného křivkami

Vypočítejte obsah rovinné plochy ohraničené křivkami. Proved'te náčrt.

a) $y = x^2 + 2$, $y = 2x^2 + 1$.

b) $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$.

[Řešené příklady na str. 97](#)

[Neřešené příklady na str. 190-191](#)

Funkce dvou proměnných - lokální extrémy

Pro danou funkci vypočítejte její lokální extrémy:

a) $f(x, y) = 4 - x^3 + x^2y - 3y^2 + 20y$

b) $f(x, y) = \ln(y - x) + 6x - y^2$

[Řešené příklady na str. 120-123](#)

[Neřešené příklady na str. 235-238](#)

Obyčejné diferenciální rovnice - lineární rovnice 2. řádu

Nalezněte obecné řešení rovnice:

a) $y'' - 4y' + 4y = x^2 - 1$

b) $y'' - y' = 8x + 2$

[Řešené příklady na str. 147-148](#)

[Neřešené příklady na str. 274-278](#)



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Kontrolní otázky z Matematiky II - verze 4a

Neurčitý integrál

- Formulujte větu pro integraci substituční metodou.
- Jak vyřešíte integrál $\int \sin^m x \, dx$, kde m je liché číslo?
- Použijte substituční metodu v integrálu $\int f(ax + b) \, dx$.

[Teorie na str. 16-18](#)

Určitý integrál

- Jak provádíme substituci v určitém integrálu?
- Jak vypočteme délku křivky danou funkcí $y = f(x)$ na intervalu $x \in \langle a, b \rangle$?
- Jak určit obsah rovinného útvaru ohraničeného dvěma funkcemi $y = f(x)$ a $y = g(x)$ v daných mezích?

[Teorie na str. 26-29](#)

Funkce dvou proměnných

- Definujte pojem lokálního extrému funkce dvou proměnných.
- Formulujte postačující podmínku pro existenci extrému ve stacionárním bodě funkce dvou proměnných.
- Jaký je rozdíl mezi lokálním a globálním extrémem?

[Teorie na str. 44, 45](#)

Obyčejné diferenciální rovnice

- V čem se liší obyčejná diferenciální rovnice prvního a druhého řádu?
- Definujte pojem lineární diferenciální rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty.
- Jak sestavujeme partikulární řešení ODR 2. řádu pro speciální pravou stranu ve tvaru polynommické funkce?

[Teorie na str. 60-63](#)



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Opakovací lekce z Matematiky II - verze 4b

Neurčitý integrál - integrace substitucí

$$\int x(4x^2 + 1)^3 dx \quad \int \sin x(1 - \cos^3 x) dx \quad \int \frac{1}{x \ln x} dx \quad \int e^x \sqrt{3e^x - 2} dx$$

[Řešené příklady na str. 72-73](#)

[Neřešené příklady na str. 162-164](#)

Určitý integrál - obsah rovinného útvaru ohraničeného křivkami

Vypočítejte obsah rovinné plochy ohraničené křivkami. Proveďte náčrt.

a) $y = \frac{x^2}{2}, y = \frac{1}{1+x^2}$.

b) $y = \sqrt{1-x^2}, y = 0$.

[Řešené příklady na str. 97](#)

[Neřešené příklady na str. 190-191](#)

Funkce dvou proměnných - lokální extrémy

Pro danou funkci vypočtete její lokální extrémy:

a) $f(x, y) = -2x^2 + 3y^3 - 4xy$

b) $f(x, y) = y + \frac{1}{y} - 2 \ln^2 x$

[Řešené příklady na str. 120-123](#)

[Neřešené příklady na str. 235-238](#)

Obyčejné diferenciální rovnice - lineární rovnice 2. řádu

Nalezněte obecné řešení rovnice:

a) $y'' + 2y' = x - 1$

b) $4y'' + 4y' + y = 3x^2$

[Řešené příklady na str. 147-148](#)

[Neřešené příklady na str. 274-278](#)



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Kontrolní otázky z Matematiky II - verze 4b

Neurčitý integrál

- Jakou metodou vyřešíte integrál $\int f(\varphi(x))\varphi'(x) dx$?
- Jak vyřešíte integrál $\int \cos^m x dx$, kde m je liché číslo?
- Použijte substituční metodu v integrálu $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$.

[Teorie na str. 16-18](#)

Určitý integrál

- Jakou metodou vypočteme integrál ve tvaru $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx$?
- Jaká se změní hodnota určitého integrálu v případě, že zaměníme dolní a horní mez? Výsledek zdůvodněte.
- Jak vypočteme obsah rovinného útvaru ohraničeného funkcí danou parametricky rovnicemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$?

[Teorie na str. 26-28](#)

Funkce dvou proměnných

- Definujte pojem stacionárního bodu funkce dvou proměnných.
- Formulujte nutnou podmínku pro existenci extrému funkce dvou proměnných.
- Co je to vázaný extrém funkce dvou proměnných?

[Teorie na str. 44-46](#)

Obyčejné diferenciální rovnice

- Na čem závisí počet integračních konstant libovolné obyčejné diferenciální rovnice?
- Definujte pojem zkrácené lineární diferenciální rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty.
- Co je to fundamentální systém řešení zkrácené diferenciální rovnice 2. řádu?

[Teorie na str. 60-63](#)



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Opakovací lekce z Matematiky II - verze 5a

Neurčitý integrály - výpočet substitucí 2. druhu

$$\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} dx \quad \int \frac{1}{1+e^t} dt \quad \int \frac{\sqrt[4]{x+3}}{1-\sqrt{x+3}} dx \quad \int \frac{1}{\sin t} dt$$

[Řešené příklady na str. 74, 85-87](#)

[Neřešené příklady na str. 176-177](#)

Aplikace určitého integrálu - objem rotačního tělesa

Vypočítejte objem rotačního tělesa Vypočítejte objem tělesa, které vznikne rotací oblasti určené

- parabolami $y = x^2 + 2$ a $y = 2x^2 + 1$ kolem osy x ,
- funkcemi $y = x^2$ a $y^2 = x$ kolem osy y ,
- podgrafem funkce $y = \sqrt{1-x^2}$ kolem osy x .

[Řešené příklady na str. 101-103](#)

[Neřešené příklady na str. 196-200](#)

Funkce dvou proměnných - tečná rovina

Pro danou funkci $F(x, y)$ napište rovnici tečné roviny a normály v bodě T, kde

- $F : z = (1 + x^2 + y^3)^3, \quad T = [2, 1, ?];$
- $F : z = \frac{\sin x - \sin y}{\cos y - \cos x}, \quad T = [0, \frac{\pi}{3}, ?];$

[Řešené příklady na str. 116](#)

[Neřešené příklady na str. 226-227](#)

Obyčejné diferenciální rovnice - ODR 2. řádu s konstantními koeficienty

Nalezněte obecné řešení rovnice:

- $y'' + 2y' + y = x^2$
- $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$
- $y'' - 2y' + y = \sin 2x$

[Řešené příklady na str. 146-150](#)

[Neřešené příklady na str. 274-278](#)

Kontrolní otázky z Matematiky II - verze 5a

Integrální počet

- Jak se liší substituční metoda v určitěma v neurčitém integrálu?
- Jakou metodu používáme pro výpočet integrálu ze složené funkce?
- Napište vzorec pro integraci pomocí lineární substituce.

Teorie na str. 16-18

Aplikace určitého integrálu

- Pomocí určitého integrálu odvoďte vzorec pro výpočet objemu válce o poloměru R a výšce v .
- Jaký je vzorec pro výpočet objemu tělesa mezi dvěma křivkami $y = f_1(x)$ a $y = f_2(x)$ na intervalu $\langle a, b \rangle$. Co musí f_1 a f_2 splňovat?
- Jak se změní vzorec pro výpočet objemu tělesa, bude-li křivka, která těleso určuje rotovat kolem osy y ? Ilustrujte na příkladu objemu kužele daného přímkou $y = 2x$.

Teorie na str. 29-30

Funkce dvou proměnných

- Popište geometrický význam derivace funkce dvou proměnných.
- Formulujte definici derivace funkce dvou proměnných.
- Zapište obecnou rovnici tečné roviny funkce dvou proměnných v daném bodě

Teorie na str. 44-46

Obyčejné diferenciální rovnice

- Jaký je rozdíl mezi obecným a partikulárním řešením diferenciální rovnice?
- Co je grafem obecného řešení diferenciální rovnice?
- Jak sestavíme partikulární řešení ODR 2. řádu pro speciální pravou stranu ve tvaru exponenciální funkce?

Teorie na str. 49, 60-63



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MŠMT
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Opakovací lekce z Matematiky II - verze 5b

Neurčitý integrál - výpočet substitucí 2. druhu

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx \quad \int \frac{1}{1+2e^t+e^{2t}} dt \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} dx \quad \int \frac{1}{\cos t} dt$$

Řešené příklady na str. 74, 85–87

Neřešené příklady na str. 176–177

Aplikace určitého integrálu - délka rovinné křivky

Pomocí určitého integrálu vypočítejte délku

- úhlopříčky v obdélníku o stranách $a = 4$, $b = 3$,
- řetězovky $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ zavěšené v bodech $x_1 = -1$ a $x_2 = 1$,
- jednoho oblouhu cykloidy $x(t) = t - \sin t$, $y(t) = 1 - \cos t$, pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Řešené příklady na str. 99-100

Neřešené příklady na str. 193-195

Funkce dvou proměnných - tečná rovina

Pro danou funkci $F(x, y)$ napište rovnici tečné roviny a normály v bodě T, kde

- $F : z = x \cdot \ln(x^2 + y^2)$, $T = [1, 0, ?]$;
- $F : z = \sqrt{\frac{2x+y}{x-y}}$, $T = [2, 1, ?]$;

Řešené příklady na str. 116

Neřešené příklady na str. 226-227

Obyčejné diferenciální rovnice - ODR 2. řádu s konstantními koeficienty

Nalezněte obecné řešení rovnice:

- $y'' + 2y' + y = 2e^x$
- $y'' + 4y' + 4y = x^3 - 4$
- $y'' - 2y' + y = 2 \cos x$

Řešené příklady na str. 146-150

Neřešené příklady na str. 274-278



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Kontrolní otázky z Matematiky II - verze 5b

Integrální počet

- Kdy používáme substituční metodu $x = \varphi(t)$?
- Jaký výsledek získáme integrací liché funkce na intervalu $\langle -a, a \rangle$?
- Jak se liší metoda per partes v neurčitém a v určitém integrálu?

[Teorie na str. 23-26](#)

Aplikace určitého integrálu

- Odvoďte vzorec pro výpočet délky křivky definované funkcí $y = g(x)$ na intervalu $I = \langle 0, 1 \rangle$.
- Odvoďte vzorec pro výpočet délky parametricky zadané křivky $[\varphi(t), \psi(t)]$ pro $t \in \langle t_1, t_2 \rangle$.
- Pomocí určitého integrálu odvoďte vzorec pro výpočet obvodu kružnice o poloměru R .

[Teorie na str. 29-30](#)

Funkce dvou proměnných

- Definujte pojem stacionárního bodu funkce dvou proměnných.
- Formulujte nutnou podmínku pro existenci extrému funkce dvou proměnných.
- Co je to vázaný extrém funkce dvou proměnných?

[Teorie na str. 44-46](#)

Obyčejné diferenciální rovnice

- Co je obecným řešením obyčejné diferenciální rovnice?
- Co je partikulárním řešením obyčejné diferenciální rovnice?
- Definujte pojem lineární ODR 1. řádu.

[Teorie na str. 49, 55-57](#)



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

**MS
MT**
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Opakovací lekce z Matematiky II - verze 6a

Integrály - výpočet kombinací metod / výběr metody / počítání s mezemi

$$\int_0^1 \arctan \sqrt{x} dx \quad \int_0^1 \sqrt{x} \cdot e^{\sqrt{x}} dx \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin x \cdot \cos x dx \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3 t}{2 - \cos t - \cos^2 t} dt$$

[Řešené příklady na str. 74, 85–87](#)

[Neřešené příklady na str. 176–177](#)

Určitý integrál - obsah rovinného útvaru ohraničeného křivkami

Vypočítejte obsah rovinné plochy ohraničené křivkami. Proved'te náčrt.

a) $y = x^2 - 2x, y = x$.

b) $y = \frac{x^2}{4}, y = 2\sqrt{x}$.

[Řešené příklady na str. 97](#)

[Neřešené příklady na str. 190-191](#)

Funkce dvou proměnných - lokální extrémy

Pro danou funkci vypočtete její lokální extrémy:

a) $f(x, y) = 2y^2 + (x - y)^2 + 4$

b) $f(x, y) = (x + y^2)e^{x/2}$

[Řešené příklady na str. 120-123](#)

[Neřešené příklady na str. 235-238](#)

Obyčejné diferenciální rovnice - lineární rovnice 2. řádu

Nalezněte obecné řešení rovnice:

a) $y'' + 2y' = \sin 3x$

b) $y'' + 9y = \cos 3x$

[Řešené příklady na str. 147-148](#)

[Neřešené příklady na str. 274-278](#)



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Kontrolní otázky z Matematiky II - verze 6a

Neurčitý integrál

- Proč je nutné u integračního vzorce $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$ pracovat s absolutní hodnotou proměnné x uvnitř logaritmické funkce?
- Odvoďte vztah pro integraci metodou per partes.
- Popište postup integrace racionální lomené funkce.

Teorie na str. 11-15, 19-20

Určitý integrál

- Odvoďte vztah pro výpočet povrchu rotačního tělesa vzniklého rotací oblasti omezené funkcí $y = f(x)$ na intervalu $x \in \langle a, b \rangle$ kolem osy x .
- Pomocí vztahu pro výpočet povrchu rotačního tělesa vypočtete povrch pláště válce o poloměru R a výšce v .
- Pomocí vztahu pro výpočet povrchu rotačního tělesa vypočtete povrch pláště kužele o poloměru R a výšce $v = R$.

Teorie na str. 30

Funkce dvou proměnných

- Definujte pojem lokálního maxima a minima funkce dvou proměnných.
- Vysvětlete rozdíl mezi lokálními a globálními extrémy funkce dvou proměnných.
- Popište postup výpočtu globálních extrémů funkce dvou proměnných.

Teorie na str. 44-46

Obyčejné diferenciální rovnice

- Co je to charakteristická rovnice a jak souvisí její řešení s řešením homogenní lineární diferenciální rovnice 2.řádu?
- Jak ovlivňují kořeny charakteristické rovnice tvar hledaného partikulárního řešení v případě, kdy speciální pravou stranou je goniometrická funkce?
- Jak postupujete při výpočtu homogenní diferenciální rovnici 1.řádu?

Teorie na str. 52, 60-63



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Opakovací lekce z Matematiky II - verze 6b

Integrály - výpočet kombinací metod / výběr metody / počítání s mezemi

$$\int_0^1 \frac{2^{-x}}{\sqrt{1-4^{-x}}} dx \quad \int_1^3 x^3 \cdot e^{x^2} dx \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x dx \quad \int_0^2 \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}x + 2\right)^4} dx$$

Řešené příklady na str. 74, 85–87

Neřešené příklady na str. 176–177

Určitý integrál - obsah rovinného útvaru ohraničeného křivkami

Vypočítejte obsah rovinné plochy ohraničené křivkami. Proved'te náčrt.

a) $y = x^2 - x - 6$, $y = -x^2 + 5x + 14$.

b) $y = x^2 - 2x + 2$, její tečnou v bodě $T = [3, 5]$ a souřadnými osami.

Řešené příklady na str. 97

Neřešené příklady na str. 190-191

Funkce dvou proměnných - lokální extrémy

Pro danou funkci vypočtete její lokální extrémy:

a) $f(x, y) = 4xy + \frac{4}{x} + \frac{32}{y} + 24$

b) $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$

Řešené příklady na str. 120-123

Neřešené příklady na str. 235-238

Obyčejné diferenciální rovnice - lineární rovnice 2. řádu

Nalezněte obecné řešení rovnice:

a) $y'' + y' + 1 = \sin x - \cos x$

b) $y'' + 4y' = 3 \sin 2x$

Řešené příklady na str. 147-148

Neřešené příklady na str. 274-278



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Kontrolní otázky z Matematiky II - verze 6b

Neurčitý integrál

- Definujte Riemannův určitý integrál funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$.
- Jaké jsou vlastnosti určitého integrálu vzhledem k operacím mezi funkcemi a vzhledem k vlastnostem funkcí?
- Napište a případně dokažte Newtonovu–Leibnizovu formuli.

[Teorie na str. 23-25](#)

Určitý integrál

- Platí pro výpočet objemu rotačního tělesa ohraničeného funkcemi $y = f(x)$ a $y = g(x)$ vzorec $V = \pi \int (f - g)^2 dx$ nebo $V = \pi \int (f^2 - g^2) dx$? Proč? Uveďte příklad.
- Platí pro výpočet plochy podgrafu funkce $y = f(x)$ vzorec $S = \left| \int f(x) dx \right|$ nebo $V = \int |f(x)| dx$? Proč? Uveďte příklad.
- Odvoďte vzorec pro výpočet délky parametrické křivky $(x(t), y(t))$ pro $t \in \langle 0, 1 \rangle$

[Teorie na str. 27-30](#)

Funkce dvou proměnných

- Vysvětlete rozdíl mezi volným a vázaným extrémem funkce dvou proměnných.
- Jak se chová tečná rovina ve stacionárním bodu funkce dvou proměnných?
- Jak poznáme při výpočtu lokálního extrému, že se jedná o minimum nebo maximum funkce dvou proměnných?

[Teorie na str. 44-46](#)

Obyčejné diferenciální rovnice

- Proč řešíme homogenní ODR 2. řádu pomocí charakteristické rovnice?
- Jak ovlivňují kořeny charakteristické rovnice tvar hledaného partikulárního řešení v případě, kdy speciální pravou stranou je exponenciální funkce?
- Jak sestavíme fundamentální systém řešení ODR 2. řádu v případě násobného kořenu charakteristické rovnice?

[Teorie na str. 60-63](#)



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY